Четырнадцатая Международная научно-техническая конференция
«Оптические методы исследования потоков»
Москва, 26 – 30 июня 2017 г.

УДК 534.16:535.341

Т. Х Салихов, Алишер Маҳмалатиф, Ю.П. Ходжаев

НИИ Таджикского национального университета, г. Душанбе, Таджикистан
734025, Душанбе, Пр.Рудаки., 17, E-mail: tsalikhov@mail.ru

ТЕОРИЯ ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ ФОТОАКУСТИЧЕСКОГО СИГНАЛА ДВУХСЛОЙНЫМИ ОПТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫМИ ТВЕРДОТЕЛЬНЫМИ ОБРАЗЦАМИ

Предложена теория генерации второй гармоники нелинейного фотоакустического сигнала оптически неоднородными двухслойными твердотельными образцами. Установлено, что для наиболее интересных случаев, имеющих место в эксперименте, амплитуда этой гармоники ФА- сигнала простым образом связана с термическим коэффициентом оптического коэффициента поглощения обоих слоев образца. Следовательно, измерение амплитуды ФА–сигнала позволяет определить величину термического коэффициента и, тем самым, температурную зависимость величины коэффициента оптического поглощения системы.

ФОТОАКУСТИКА, ТЕПЛОВАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ, ФОТОАКУСТИЧЕСКИЙ ОТКЛИК, ВТОРАЯ ГАРМОНИКА

Формулировка проблемы и исходные уравнения

Особенности генерации нелинейного фотоакустического (ФА) сигнала для одно- и двухслойных оптически однородных систем теоретически подробно исследованы в [1-5]. В частности, было установлено, что этот сигнал генерируется на наборе дискретных частот и основными являются первый две, амплитуда которых простым образом связана, как с теплофизическими и оптическими параметрами среды, так и с термическими коэффициентами (ТК) этих величин. Это означает, что из измерения амплитуды нелинейной составляющей ФА–сигнала можно определить температурную зависимость макроскопических параметров среды. Теория генерации второй гармоники (ВГ) оптически неоднородных однослойных твердотельных образцов подробно изучена в [6], где было установлено, что амплитуда этой гармоники сигнала также зависит от ТК оптического коэффициента поглощения образца. Тогда очевидно, что измерение амплитуды ВГ нелинейного ФА- сигнала позволяет определить температурную зависимость коэффициента поглощения, измерение которой непосредственно оптическими способами сопряжены с большими трудностями. Однако в зависимости от оптических свойств материал образцов и их толщин, а также от длины волны падающего лазерного луча возможен случай частичного поглощения падающего лазерного луча, как первым, так и вторым слоями. Обычно подобные системы принято называть полупрозрачными. Фактически, для таких систем определяющим являются значения параметров $\beta_1 l_1$ и $\beta_2 l_2$, где β_i и l_i - оптические коэффициенты поглощения и толщины слоев соответственно. В зависимости от значения этих величин могут реализоваться различные варианты эксперимента. В данной работе предполагается, что величины $\beta_i l_i$ могут иметь произвольные значения. Целью настоящей работы является создание теории возбуждения ВГ ФА– сигнала двухслойными оптически неоднородными твердотельными образцами.

Примем во внимание, что нелинейный ФА– сигнал обусловлен температурной зависимостью теплофизических и оптических параметров обоих слоев исследуемых образцов, а также теплофизическими параметрами буферного газа и подложки. Принципиальное отличие рассматриваемого случая от [5] состоит в том, что оптический коэффициент поглощения обоих слоёв благодаря своей зависимости от температуры становится функцией координат и времени. Тогда справедливы функциональные зависимости $\beta_i(\mathrm{t},x) = \beta_i(T_i(t,x))$. Следовательно, в качестве исходных уравнений может служить следующая система нелинейных уравнений теплопроводности для всех четырех (буферного газа, первых и вторых слоев образца и подложки) слоев ФА– камеры:

$$C_{pg}(T_g)\frac{\partial T_g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa_g(T_g)\frac{\partial T_g}{\partial x}\right), \qquad 0 \le x \le l_g, \tag{1}$$

$$C_{PS(1)}\frac{\partial T'_{S(1)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k_{S(1)}(T)\frac{\partial T'_{S(1)}}{\partial x}\right] + 0.5 I_0 A_{S(1)}(T)(1+e^{i\omega t})\frac{\partial}{\partial x}e^{\int_0^x \beta_1(t,y)dy}, \quad -l_{S(1)} \le x \le 0, \tag{2}$$

$$C_{PS(2)}\frac{\partial T'_{S(2)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k_{S(2)}(T)\frac{\partial T'_{S(2)}}{\partial x}\right] + 0.5 I_0 A_{S(2)}(T)(1-R_{S(1)}(T))(1+e^{i\omega t})e^{\int_0^{-\partial_1}\beta_1(t,x)dx}\frac{\partial}{\partial x}e^{\int_{-l_1}^x \beta_2(t,y)dy}, \quad -(l_{S(1)}+l_{S(1)}) \le x \le -l_{S(1)}, \tag{3}$$

$$C_{pb}(T_b)\frac{\partial T_b}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa_b(T_b)\frac{\partial T_b}{\partial x}\right), \qquad -(l_b + l_{S(1)} + l_{S(2)}) \le x \le -l_{S(1)} - l_{S(2)}, \tag{4}$$

где $C_{pi}(T_i)$ - теплоемкость единицы объема, $\kappa_{pi}(T_i)$ - теплопроводность, $\mathrm{A}_{S(i)}(T)$ - поглощающая способность (степень черноты) и $\mathrm{R}_{S(i)}(T)$ -коэффициент отражения соответствующих слоев.

Температурную зависимость величин $C_{pi}(T)$, $\kappa_i(T)$, $\mathrm{A}_{S(\mathrm{i})}(T)$ и коэффициентов поглощения слоев $\beta_i(\mathrm{T})$ представим в следующем виде:

$$(1-\mathrm{R}_{1\mathrm{S}(1)}) = (1-\mathrm{R}_{1\mathrm{S}(1)})^{(0)}(1+\delta_{5(1)}T'_{s(1)}(0,t)),\ C_{pi} = C_{pi}^{(0)}(1+\delta_i T'_{\mathrm{i}}),\ \kappa_i = \kappa_i^{(0)}(1+\delta_{2i}T'_i),$$

$$\mathrm{A}_{S(i)}(T) = \mathrm{A}_{S(i)}^{(0)}(1+\delta_{3S(i)}T'_i), \quad \beta_{\mathrm{i}}(T_i(t,x) = \beta_i^{(0)}[1+\delta_{4(i)}T'_i(t,x)],$$

где $C_{pi}^{(0)} = C_{pi}(T_0)$, $\kappa_i^{(0)} = \kappa(T_0)$, $\mathrm{A}^{(0)} = A(T_0)$, $\beta_i^{(0)} = \beta(T_0)$ - начальные значения, а $\delta_i = (1/C_{pi}^{(0)})(\partial C_{pi}/\partial T), \delta_{1i} = (1/c_{pi}^{(0)})(\partial c_{pi}^{(0)}/\partial T)$,

$\delta_{2i} = (1/\kappa_{2i}^{(0)})(\partial\kappa_i/\partial T), \delta_3 = (1/A^{(0)})(\partial A/\partial T), \delta_5 = (1/(1-R_{1S(1)})^{(0)})(\partial(1-R_{1S(1)})/\partial \mathrm{T}), \delta_4 = (1/\beta_i^{(0)})(\partial\beta_i/\partial T)$ - термические коэффициенты этих параметров, $\delta_i = \delta_{1i} - \alpha_{Ti}$, $\alpha_{Ti} = -(1/\rho_{0i})(\partial\rho_i/\partial T)_p$ - коэффициент теплового расширения, $c_{pi}^{(0)}$ - удельная теплоемкость соответствующего слоя.

Для рассматриваемого случая принципиальную роль играют последние слагаемые в уравнениях (2) и (3), а именно функции

$$e^{\int_0^x \beta_1(t,y)dy} \quad \text{и} \quad e^{\int_{-l_1}^x \beta_2(t,y)dy}.$$

После подстановки выражения $\beta_i(T_i(t,x) = \beta_i^{(0)}[1+\delta_{5(i)}T_i'(t,x)]$ эти функции соответственно примут вид

$$e^{\beta_1^{(0)}(x+\delta_{4S(1)}\int_0^x T_{S(1)}(t,y)dy}, \quad e^{\beta_2^{(0)}(x+\delta_{4S(2)}\int_{-l_1}^x T_{S(2)}(t,y)dy)}.$$

Принимая во внимание, что вторые слагаемые в показателе экспонент значительно меньше первых, разложим эти функции в ряд по этим поправкам и будем иметь

$$e^{\beta_1^{(0)}(x+\delta_{4S(1)}\int_0^x T_{S(1)}(t,y)dy} \approx e^{\beta_1^{(0)}x}[1+\beta_1^{(0)}\delta_{4S(1)}\int_0^x T_{S(1)}(t,y)dy],$$

$$e^{\beta_2^{(0)}(x+\delta_{4S(2)}\int_{-l_1}^x T_{S(2)}(t,y)dy)} \approx e^{\beta_2^{(0)}(x+l_1)}[1+\beta_2^{(0)}\delta_{4S(2)}\int_{-l_1}^x T_{S(2)}(t,y)dy] \quad .$$

С учетом этих обстоятельств уравнения (2) и (3) примут вид

$$\begin{aligned} C_{PS(1)}\frac{\partial T_{S(1)}'}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}[k_{S(1)}(T)\frac{\partial T_{S(1)}'}{\partial x}] + \\ &+ 0.5I_0 A_{S(1)}(T)(1+e^{i\omega t})\frac{\partial}{\partial x}e^{\beta_1^{(0)}x}[1+\beta_1^{(0)}\delta_{4S(1)}\int_0^x T_{S(1)}(t,y)dy] \end{aligned}, \quad -l_{S(1)} \le x \le 0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} C_{PS(2)}\frac{\partial T_{S(2)}'}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}[k_{S(2)}(T)\frac{\partial T_{S(2)}'}{\partial x}] + 0.5I_0 A_{S(2)}(T)(1-R_{S(1)}(T))(1+e^{i\omega t}) \\ & e^{-\beta_1^{(0)}l_1}[1+\beta_1^{(0)}\delta_{5S(1)}\int_0^{-l_1} T_{S(1)}(t,y)dy]\frac{\partial}{\partial x}e^{\beta_1^{(0)}(x+l_1)}[1+\beta_2^{(0)}\delta_{4S(2)}\int_{-l_1}^x T_{S(2)}(t,y)dy] \end{aligned}, \quad -(l_{S(1)}+l_{S(1)}) \le x \le -l_{S(1)}, \tag{6}$$

Для рассматриваемого случая восемь граничных условий - непрерывность температур и потоков тепла на границах газ-первый слой образца ($x=0$), первый слой - второй слой ($x=-l_{S(1)}$), второй слой- подложка ($x=-(l_{S1}+l_{S2})$) и отсутствие нагрева на торцах ФА- камеры имеют вид

$$T_g'(t,l_g)=0; \quad T_b'[t,-(l_b+l_{S(1)}+l_{S(2)})]=0; \quad T_g'(t,0)=T_{S(1)}'(t,0); \tag{7}$$

$$T_{S(1)}'(t,-l_{S(1)}) = T_{S(2)}'(t,-l_{S(1)}); \quad T_{S(2)}'(t,-l_{S(1)}-l_{S(2)}) = T_b'(t,-l_{S(1)}-l_{S(2)}); \tag{8}$$

$$[k_{S(1)}(T_{S(1)})\frac{dT_{S(1)}'}{dx}]_{x=0} = [k_g(T_g)\frac{dT_g'}{dx}]_{x=0}; \tag{9}$$

$$[k_{S(1)}(T_{S(1)})\frac{dT_{S(1)}'}{dx}]_{x=-l_{S(1)}} = [k_{S(2)}(T_{S(2)})\frac{dT_{S(2)}'}{dx}]_{x=-l_{S(1)}}; \tag{10}$$

$$[k_{S(2)}(T_{S(2)}')\frac{dT_{S(2)}'}{dx}]_{x=-(l_{S(1)}+l_{S(2)})} = [k_b(T_b')\frac{dT_b'}{dx}]_{x=-(l_{S(1)}+l_{S(2)})} \quad . \tag{11}$$

Система уравнений (1)-(2) и (5)-(6) совместно с граничными условиями (7)-(11) являются исходными уравнениями для исследования особенностей возбуждения нелинейного фотоакустического отклика для двухслойных систем с объемным поглощением луча. Расчеты показывают, что численное значение величины δ_5 на два порядка меньше по сравнению с δ_1, δ_2, δ_3 и δ_5, в этой связи в дальнейшим мы пренебрегаем этим параметром.

Как правило, измерение ФА-сигнала производится после того, когда устанавливается локально равновесное поле температуры в ФА-камере. Следовательно, приращение температурного поля во всех слоях состоит из суммы локально равновесных $T_{0i}(x)$ и колебательных частей $\Phi_i(t,x)$. Это означает, что если $T_i(t,x) = T_0 + T_i'(t,x)$, где T_0-начальное значение температуры ФА- камеры, тогда $T_i'(t,x) = T_{0i}(x) + \Phi_i(t,x)$. Колебательная часть возмущения температуры $\Phi_i(t,x)$ состоит из суперпозиции линейных $\Phi_{Li}(x,t)$ и нелинейных $\Phi_{Ni}(x,t)$ составляющих $\Phi_i(x,t)=\Phi_{Li}(x,t)+\Phi_{1Ni}(x,t)+\Phi_{2Ni}(x,t)$, где $\Phi_{1N}(t,x)$ и $\Phi_{2N}(t,x)$ - эти же колебания на основной и на удвоенных гармониках.. Для получения вида $\Phi_{2N}(t,x)$ необходимо построить уравнения и граничные условия для них. Принимая во внимание условие $\left|\varPhi_{N_i}(t,x)\right| << \left|\varPhi_{L_i}(t,x)\right|$ и пренебрегая величинами высших порядков малости для второй гармоники $\Phi_{2Ni}(t,x)$ нелинейной составляющей акустического колебания температуры для всех слоев в ФА – камеры, получим

$$\frac{\partial^2\Phi_{2Ng}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_g^{(0)}}\frac{\partial\Phi_{2Ng}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\left(\delta_{2g}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_g}{\chi_g^{(0)}}\frac{\partial}{\partial t}\right)[\Phi_{Lg}^2(t,x)], \qquad (12)$$

$$\frac{\partial^2\varPhi_{2NS(1)}}{\partial x^2} = \frac{1}{\chi_{1S(1)}^{(0)}}\frac{\partial\varPhi_{2NS(1)}}{\partial t} - 0{,}5\left(\delta_{2S(1)}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{1S(1)}}{\chi_{1S(1)}^{(0)}}\frac{\partial}{\partial t}\right)\varPhi_{\mathrm{LS}(1)}^2(x,t)) - \frac{I_0 A_{S(1)}^{(0)}\beta_1^{(0)} e^{\beta_1^{(0)}x}}{2k_{S(1)}^{(0)}}\times$$
$$\times\{\delta_{3(1)}\varPhi_{LS(1)}(0,t) + \delta_{4(1)}[\varPhi_{LS(1)}(x,t) + \beta_1^{(0)}\int_0^x \varPhi_{LS(1)}(y,t)dy]\}, \qquad (13)$$

$$\frac{\partial^2\varPhi_{2NS(2)}}{\partial x^2} = \frac{1}{\chi_{1S(2)}^{(0)}}\frac{\partial\varPhi_{2NS(2)}}{\partial t} - 0{,}5\left(\delta_{2S(2)}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{1S(2)}}{\chi_{1S(2)}^{(0)}}\frac{\partial}{\partial t}\right)\varPhi_{\mathrm{LS}(2)}^2(x,t)) - \frac{I_0 A_{S(2)}^{(0)}(1-R_{S(1)})^{(0)}\beta_2^{(0)} e^{\beta_2^{(0)}(x+l_1)}}{2k_{S(1)}^{(0)}}\times$$
$$\times e^{i\omega t}\{\delta_{3(1)}\varPhi_{LS(2)}(0,t) + \delta_{4(2)}[\varPhi_{LS(2)}(x,t) + \beta_2^{(0)}\int_{-l_1}^{x}\varPhi_{LS(2)}(y,t)dy] + \beta_1^{(0)}\delta_{4(2)}\int_0^{-l_1}\varPhi_{LS(1)}(y,t)dy\}, \qquad (14)$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{2Nb}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_b^{(0)}}\frac{\partial\Phi_{2Nb}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\left(\delta_{2b}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_b}{\chi_b^{(0)}}\frac{\partial}{\partial t}\right)[\Phi_{Lb}^2(t,x)]. \qquad (15)$$

Восемь граничных условий, необходимых для решения (1)-(4), имеют вид:

$$\Phi_{2Ns(1)}(t,0) = \Phi_{2Ng}(t,0), \quad \Phi_{2Nb}(t,-l_b - l_{S(1)} - l_{S(2)}) = \Phi_{2Ns(2)}(t,-l_b - l_{S(1)} - l_{S(2)}), \qquad (16)$$

$$\left\{\frac{\partial\Psi_{2g}(t,x)}{\partial x}\right\}\bigg|_{x=0} = \frac{\kappa_{s(1)}^{(0)}}{\kappa_g^{(0)}}\frac{\partial\Psi_{2s}(t,x)}{\partial x}\bigg|_{x=0}, \qquad (17)$$

$$\Phi_{2Ns(1)}(t,-l_{s(1)}) = \Phi_{2Ns(2)}(t,-l_{s(2)}), \quad \frac{\partial\Psi_{2S(1)}(t,x)}{\partial x}\bigg|_{x=-l_{s(1)}} = \frac{\kappa_{s(2)}^{(0)}}{\kappa_{s(1)}^{(0)}}\frac{\partial\Psi_{2s(2)}(t,x)}{\partial x}\bigg|_{x=-l_{s(2)}}, \qquad (18)$$

$$\Phi_{2Nb}(t,-l_{S(1)} - l_{S(2)} - l_b) = \Phi_{2Ng}(t,l_g) = 0, \quad \frac{\partial\Psi_{2b}(t,x)}{\partial x}\bigg|_{x=-l_{S(1)}-l_{S(2)}} = \frac{\kappa_{s(2)}^{(0)}}{\kappa_b^{(0)}}\frac{\partial\Psi_{2s}(t,x)}{\partial x}\bigg|_{x=-l_{S(1)}-l_{S(2)}}, \qquad (19)$$

где $\Psi_{2i}(t,x) = \Phi_{2Ni}(t,x) + 0{,}5\delta_{2i}\Phi_{Li}^2(t,x)$.

Из вида уравнений (12)-(15) ясно, что для их решения и получения выражений для величин $\Phi_{2N}(t,x)$ необходимо иметь явный вид $\Phi_{\mathrm{Li}}(t,x)$ для соответствующих слоев. Вид функции $\Phi_{\mathrm{Li}}(t,x)$ для рассматриваемой геометрии эксперимента получен в [7]:

$$\Phi_{Lg}=\Theta_L e^{-\sigma_{1g}x},\ \Phi_{Lb}=W_L e^{\sigma_{1b}(x+l_1+l_2)},\ \Theta_L=-(E_1\Delta_1+2E_2\Delta_2)/\Delta,$$

$$\Phi_{LS(1)}=U_{L1}e^{\sigma_{1S(1)}x}+V_{L1}e^{-\sigma_{1S(1)}x}-E_1e^{\beta_1^{(0)}x},\ E_1=\frac{B}{(\beta_1^{(0)})^2-\sigma_{1S(1)}^2},\ B=\frac{I_0\beta_1\eta_1}{2k_{S(1)}^{(0)}},$$

$$\Phi_{LS(2)}=U_{L2}e^{\sigma_{1S(2)}(x+l_1)}+V_{L2}e^{-\sigma_{1S(2)}(x+l_1)}-E_2e^{\beta_2^{(0)}(x+l_1)},\quad E_2=\frac{B_1}{\beta_2^2-\sigma_2^2},\quad B_1=\frac{I_0\beta_2\eta_2}{2k_{S(2)}^{(0)}}e^{-\beta_1 l_1},$$

$$\mathrm{W_{Lb}}=b(U_{L2}e^{-\sigma_{1S(2)}l_2}-V_{L2}e^{\sigma_{1s(2)}l_2}-E_2e^{-\beta_2 l_2}\frac{\beta_2}{\sigma_{1S(2)}}),$$

$$2U_{L1}=\Theta_L+E_1(\frac{\beta_1}{\sigma_{1S(1)}}+1),\ 2V_{L1}=\Theta_L-E_1(\frac{\beta_1}{\sigma_{1S(1)}}-1),$$

$$U_{L2}=0.25\{[\Theta_{\mathrm{L}}+E_1(\frac{\beta_1}{\sigma_{1S(1)}}+1)](s+1)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}-[\Theta_L-E_1(\frac{\beta_1}{\sigma_{1S(1)}}-1)](s-1)e^{\sigma_{1S(1)}l_1}-$$
$$-2E_1(\frac{s\beta_1}{\sigma_{1S(1)}}+1)e^{-\beta_1 l_1}+2E_2(\frac{\beta_2}{\sigma_{1S(2)}}+1)\},$$

$$V_{L2}=-0.25\{[\Theta_L+E_1(\frac{\beta_1}{\sigma_{1S(1)}}+1)](s-1)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}-[\Theta_L-E_1(\frac{\beta_1}{\sigma_{1S(1)}}-1)](s+1)e^{\sigma_{1S(1)}l_1}-$$
$$-2E_1(\frac{s\beta_1}{\sigma_{1S(1)}}-1)e^{-\beta_1 l_1}+2E_2(\frac{\beta_2}{\sigma_{1S(2)}}-1)\},$$

$$\Delta=[(s+1)(b-1)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}e^{-\sigma_{1S(2)}l_2}-e^{\sigma_{1S(1)}l_1}(s-1)](b-1)e^{-\sigma_{1S(2)}l_2}+$$
$$+[(s-1)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}-(s+1)e^{\sigma_{1S(1)}l_1}](b+1)e^{\sigma_{1S(1)}l_1}e^{\sigma_{1S(2)}l_2},$$

$$\Delta_2=(\frac{\beta_2}{\sigma_{1S(2)}}+1)(b-1)e^{-\sigma_{1S(2)}l_2}+(\frac{\beta_2}{\sigma_{1S(2)}}-1)(b+1)e^{\sigma_{1S(2)}l_2}-2(\frac{b\beta_2}{\sigma_{1S(2)}}-1)e^{-\beta_2^{(0)}l_2},$$

$$\Delta_1=[(\frac{\beta_1}{\sigma_{1S(1)}}+1)(s+1)e^{-\sigma_{S(1)}l_1}+(\frac{\beta_1}{\sigma_{1S(1)}}-1)(s-1)e^{\sigma_{1S(1)}l_1}](b-1)e^{-\sigma_{1S(2)}l_2}-2[(\frac{s\beta_1}{\sigma_{1S(1)}}+1)(b-1)e^{-\sigma_{1S(2)}l_2}+$$
$$+(\frac{s\beta_1}{\sigma_{1S(1)}}-1)(b+1)e^{\sigma_{1S(2)}l_2}]e^{-\beta_1 l_1}+[(\frac{\beta_1}{\sigma_{1S(1)}}+1)(s-1)e^{-\sigma_{1S(1)}l_1}+(\frac{\beta_1}{\sigma_{1S(1)}}-1)(s+1)e^{\sigma_{1S(1)}l_1}](b+1)e^{\sigma_{1S(2)}l_2}$$

В выше приведенных выражениях использованы следующие обозначения:

$$g=\frac{k_g^{(0)}\sigma_g}{k_{S(1)}^{(0)}\sigma_{1S(1)}}=\frac{k_g^{(0)}a_g}{k_{S(1)}^{(0)}a_{1S(1)}},\ s=\frac{k_{S(1)}^{(0)}\sigma_{S(1)}}{k_{S(2)}^{(0)}\sigma_{1S(2)}}=\frac{k_{S(1)}^{(0)}a_{S(1)}}{k_{S(2)}^{(0)}a_{1S(2)}},\ b=\frac{k_b^{(0)}\sigma_{b)}}{k_{S(2)}^{(0)}\sigma_{1S(2)}}=\frac{k_b^{(0)}a_b}{k_{S(2)}^{(0)}a_{1S(2)}},$$

где $\sigma_{1\mathrm{g}}=(1+i)/\mu_{1g}^{(0)}$, $\sigma_{1\mathrm{S}(1)}=(1+i)/\mu_{1S(1)}^{(0)}$, $\sigma_{1\mathrm{S}(2)}=(1+i)/\mu_{1S(2)}^{(0)}$, $\sigma_{1\mathrm{b}}=(1+i)/\mu_{1b}^{(0)}$, $\mu_i=(\omega/2\chi_i^{(0)})^{1/2}$ -длина тепловой волны в соответствующих средах.

Из (12)-(15) для функции $\Psi_{2i}(t,x)$ получим следующие уравнения для соответствующих слоев:

$$\frac{\partial^2\Psi_{2i}}{\partial x^2}-\frac{1}{\chi_i^{(0)}}\frac{\partial\Psi_{2i}}{\partial t}=\frac{\delta_i-\delta_{2i}}{2\chi_i^{(0)}}\frac{\partial\Phi_{Li}^2}{\partial t}\ ,\ (i=g,b)\ , \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2\Psi_{2S(1)}}{\partial x^2}-\frac{1}{\chi_{S(1)}^{(0)}}\frac{\partial\Psi_{2S(1)}}{\partial t}=\frac{\delta_{S(1)}-\delta_{2S(1)}}{2\chi_{S(1)}^{(0)}}\frac{\partial\Phi_{LS(1)}^2}{\partial t}-\frac{I_0A_{S(1)}^{(0)}\beta_1 e^{\beta_1 x}}{2k_{S(1)}^{(0)}}e^{i\omega t}\ , \tag{21}$$
$$\times\{\delta_{3(1)}\Phi_{LS(1)}(0,t)+\delta_{4(1)}[\Phi_{LS(1)}(x,t)+\beta_1^{(0)}\int_0^x\Phi_{LS(1)}(y,t)dy]\}$$

$$\frac{\partial^2\Psi_{2S(2)}}{\partial x^2}-\frac{1}{\chi_{S(2)}^{(0)}}\frac{\partial\Psi_{2S(2)}}{\partial t}=\frac{\delta_{1S(2)}-\delta_{2S(2)}}{2\chi_{S(2)}^{(0)}}\frac{\partial\Phi_{LS(2)}^2}{\partial t}-\frac{I_0A_{S(2)}^{(0)}(1-R_{S(1)})^{(0)}\beta_2 e^{\beta_2(x+l_{S(1)})}}{2k_{S(2)}^{(0)}}e^{i\omega t} \tag{22}$$
$$\times\{\delta_{3(2)}\Phi_{LS(2)}(0,t)+\delta_{4(2)}[\Phi_{LS(1)}(x,t)+\beta_2^{(0)}\int_{-l_1}^x\Phi_{LS(2)}(y,t)dy]+\beta_1^{(0)}\int_0^{-l_1}\Phi_{LS(1)}(y,t)dy\}$$

Учитывая наличие гармонических источников в правых частях (10) и (11), а также то, что $\Phi_L^2\approx\Phi_L^2(\omega,x)\exp(i2\omega t)$, в (9)-(11) положим $\Psi_{2i}(t,x)=\Psi_{2i}(\omega,x)\exp(i2\omega t)$. Тогда, используя обозначения $\sigma_{2i}^2=2i\omega(\chi_i^{(0)})^{-1}$, $\sigma_{2i}=(1+i)\mu_{2i}^{-1}$, где $\mu_{2i}=\mu_i/\sqrt{2}$ - длина тепловой диффузии ВГ тепловой волны, получим:

$$\frac{d^2\Psi_{2i}}{dx^2}-\sigma_{2i}^2\Psi_{2i}=\frac{(\delta_i-\delta_{2i})}{2}\sigma_{2i}^2\Phi_{Li}^2(\omega,x)\ ,\ (i=g,b)\ , \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2\Psi_{2S(1)}}{\partial x^2}-\sigma_{2S(1)}^2\Psi_{2S(1)}=\frac{\sigma_{2S(1)}^2(\delta_{1S(1)}-\delta_{2S(1)})\Phi_{\mathrm{LS(1)}}^2(x,\omega)}{2}- \tag{24}$$
$$-Be^{\beta_1^{(0)}x}\{\delta_{3S(1)}\Phi_{LS(1)}(0,\omega)+\delta_{4S(1)}\Phi_{LS(1)}(x,\omega)+\delta_{4S(1)}\beta_1^{(0)}\int_0^x\Phi_{LS(1)}(y,\omega)dy\}\ ,$$

$$\frac{\partial^2\Psi_{2S(2)}}{\partial x^2}-\sigma_{2S(2)}^2\Psi_{2S(2)}=\frac{\sigma_{2S(1)}^2(\delta_{1S(2)}-\delta_{2S(2)})\Phi_{\mathrm{LS(2)}}^2(x,\omega)}{2}- \tag{25}$$
$$-B_1e^{\beta_2^{(0)}(x+l_1)}\{\delta_{3S(2)}\Phi_{LS(2)}(-l_1,\omega)+\delta_{4S(2)}\Phi_{LS(2)}(x,\omega)+\delta_{4S(2)}\beta_2^{(0)}\int_{-l_1}^x\Phi_{LS(2)}(y,\omega)dy+\delta_{4S(1)}\beta_1^{(0)}\int_0^{-l_1}\Phi_{LS(1)}(y,\omega)dy\}\ .$$

Для решения неоднородных уравнений второго порядка (12)-(14) воспользуемся известным методом вариации постоянных. Тогда, используя обозначение $R_{2i}=0{,}25(\delta_i-\delta_{2i})\sigma_{2i}$ для искомых функций, будем иметь:

$$\Psi_{2g}(\omega,x)=\Theta_{2Ng}e^{-\sigma_{2g}x}+e^{\sigma_{2g}x}W_{1g}(\omega,x)-e^{-\sigma_{2g}x}W_{2g}(\omega,x), \tag{26}$$

$$\Psi_{2b}(\omega,x)=W_{2Nb}e^{+\sigma_{2b}(x+l_{S(1)}+l_{S(2)})}+e^{\sigma_{2b}(x+l_{S(1)}+l_{S(2)})}W_{1b}(\omega,x)-e^{-\sigma_{2b}(x+l_{S(1)}+l_{S(2)})}W_{2b}(\omega,x)\ , \tag{27}$$

$$\Psi_{2S(1)}=\gamma_{1(1)}e^{\sigma_{2S(1)}x}+\gamma_{2(1)}e^{-\sigma_{2S(1)}x}+[W_{1S(1)}(\omega,x)-Q_{1S(1)}(\omega,x)-\mathrm{H}_1(\omega,x)]e^{\sigma_{2S(1)}x}- \tag{28}$$
$$-[W_{2S(1)}(\omega,x)-\mathrm{Z}_{1s(1)}(\omega,x)-\mathrm{H}_2(\omega,x)]e^{-\sigma_{2S(1)}x}\ ,$$

$$\Psi_{2S(2)}=\gamma_{1(2)}e^{\sigma_{2S(2)}(x+l_{S(1)})}+\gamma_{2(2)}e^{-\sigma_{2S(2)}(x+l_{S(1)})}+[R_{2S(2)}W_{1S(2)}(\omega,x)-Q_{2S(2)}(\omega,x)-\mathrm{H}_3(\omega,x)-\mathrm{H}_5(\omega,x)]e^{\sigma_{2S(2)}(x+l_{S(1)})}- \tag{29}$$
$$-[W_{2S(2)}(\omega,x)-\mathrm{Z}_{2S(2)}(\omega,x)-\mathrm{H}_4(\omega,x)-\mathrm{H}_6(\omega,x)]e^{-\sigma_{2S(2)}(x+l_{S(1)})}$$

В (26)-(27) использованы следующие обозначения:

$$W_{1g}(\omega,x)=R_{2g}\int \Phi_{Lg}^2(\omega,x)e^{-\sigma_{2g}x}dx, \qquad W_{2g}(\omega,x)=R_{2g}\int \Phi_{Lg}^2(\omega,x)e^{\sigma_{2g}x}dx,$$

$$W_{1b}(\omega,x)=R_{2b}\int \Phi_{Lb}^2(\omega,x)e^{-\sigma_{2b}(x+l_{S(1)}+l_{S(2)})}dx, \qquad W_{2b}(\omega,x)=R_{2b}\int \Phi_{Lb}^2(\omega,x)e^{\sigma_{2b}(x+l_{S(1)}+l_{S(2)})}dx,$$

$$W_{1S(1)}(\omega,x)=R_{2S(1)}\int \Phi_{\mathrm{LS(1)}}^2(x,\omega)e^{-\sigma_{2S(1)}x}dx, \qquad W_{2S(2)}(\omega,x)=R_{2S(2)}\int \Phi_{\mathrm{LS(2)}}^2(x,\omega)e^{\sigma_{2S(2)}(x+l_{S(1)})}dx$$

$$W_{1S(2)}(\omega,x)=R_{1S(2)}\int e^{-\sigma_{2S(2)}(x+l_{S(1)})}\Phi_{\mathrm{LS(2)}}^2(x,\omega)dx, \qquad W_{2S(1)}(\omega,x)=R_{2S(1)}\int e^{\sigma_{2S(1)}x}\Phi_{\mathrm{LS(1)}}^2(x,\omega)dx$$

$$Q_{1S(1)}(\omega,x)=0.5B\delta_{3(1)}(\sigma_{2S(1)})^{-1}\int e^{(\beta_1-\sigma_{2S(1)})x}\Phi_{LS(1)}(0,\omega)dx, \quad \mathrm{Z}_{1S(1)}(\omega,x)=0.5B\delta_{3(1)}(\sigma_{2S(1)})^{-1}\int e^{(\beta_1+\sigma_{2S(1)})x}\Phi_{LS(1)}(0,\omega)dx$$

$$Q_{2S(2)}(\omega,x)=0.5B_1\delta_{3(2)}(\sigma_{2S(1)})^{-1}\int e^{(\beta_2-\sigma_{2S(2)})(x+l_{S(1)})}\Phi_{LS(2)}(-l_{S(1)},\omega)dx, \quad \mathrm{Z}_{2S(2)}(\omega,x)=0.5B_1\delta_{3(2)}(\sigma_{2S(1)})^{-1}\int e^{(\beta_2+\sigma_{2S(2)})(x+l_{S(1)})}\Phi_{LS(2)}(-l_{S(1)},\omega)dx$$

$$\mathrm{H}_1(\omega,x)=0.5B\delta_{4(1)}(\sigma_{2s(1)})^{-1}\int[\Phi_{\mathrm{L1S(1)}}(\omega,\mathrm{x})-\beta_1^{(0)}\int_0^x\Phi_{\mathrm{L1S(1)}}(\omega,\mathrm{y})dy]e^{(\beta_1^{(0)}-\sigma_{2s(1)})x}dx$$

$$\mathrm{H}_2(\omega,x)=0.5B\delta_{4(1)}(\sigma_{2s(1)})^{-1}\int[\Phi_{\mathrm{L1S(1)}}(\omega,\mathrm{x})-\beta_1^{(0)}\int_0^x\Phi_{\mathrm{L1S(1)}}(\omega,\mathrm{y})dy]e^{(\beta_1^{(0)}+\sigma_{2s(1)})x}dx$$

$$\mathrm{H}_3(\omega,x)=0.5B_1\delta_{4(2)}(\sigma_{2s(2)})^{-1}\int[\Phi_{\mathrm{L2S(2)}}(\omega,\mathrm{x})-\beta_2^{(0)}\int_{-l_1}^x\Phi_{\mathrm{L2S(2)}}(\omega,\mathrm{y})dy]e^{(\beta_2^{(0)}-\sigma_{2s(2)})(x+l_1)}dx$$

$$\mathrm{H}_4(\omega,x)=0.5B_1\delta_{4(2)}(\sigma_{2s(2)})^{-1}\int[\Phi_{\mathrm{L2S(2)}}(\omega,\mathrm{x})-\beta_2^{(0)}\int_{-l_1}^x\Phi_{\mathrm{L2S(2)}}(\omega,\mathrm{y})dy]e^{(\beta_2^{(0)}+\sigma_{2s(2)})(x+l_1)}dx$$

$$\mathrm{H}_5(\omega,x)=0.5B_1\delta_{4(1)}(\sigma_{2s(2)})^{-1}\beta_1^{(0)}\int_0^{-l_1}[\Phi_{\mathrm{L1S(1)}}(\omega,\mathrm{y})dy]e^{(\beta_2^{(0)}-\sigma_{2s(2)})(x+l_1)}dx$$

$$\mathrm{H}_6(\omega,x)=0.5B_1\delta_{4(1)}(\sigma_{2s(2)})^{-1}\beta_1^{(0)}\int_0^{-l_1}[\Phi_{\mathrm{L1S(1)}}(\omega,\mathrm{y})dy]e^{(\beta_2^{(0)}+\sigma_{2s(2)})(x+l_1)}dx$$

Выше выписанный явный вид функции $\Phi_{Li}(\omega,x)$ позволяет легко вычислить приведенные интегралы. В (26)-(29) входят неизвестные величины $\Theta_{2Ng},\gamma_{1(1)},\gamma_{1(2)},\gamma_{2(1)},\gamma_{2(2)},W_{2Nb}$, для определения которых с использованием граничных условий (16)–(19) – условий непрерывности температур и потоков тепла, получим систему из шести алгебраических уравнений. Это позволит найти выражение для Θ_{2Ng} и нелинейной составляющей колебания температуры на удвоенной частоте:

$$\Phi_{2Ng}(\omega,x)=\Theta_{2Ng}e^{-\sigma_{2g}x}+e^{\sigma_{2g}x}W_{1g}(\omega,x)-e^{-\sigma_{2g}x}W_{2g}(\omega,x)-0.5\delta_{2g}\Phi_{Lg}^2(\omega,x). \qquad (30)$$

Тогда нелинейный ФА–сигнал, регистрируемый микрофоном через буферный газ, будет определяться выражением

$$\delta p_2(\omega)=\frac{\gamma p_0 2\pi\mu_{2g}}{T_0 l_g}\overline{\Phi}_{2N}(\omega)=\frac{\gamma p_0}{T_0 l_g}\int_0^{2\pi\mu_{2g}}\Phi_{2N}(\omega,x)dx. \qquad (31)$$

Очевидно, что это выражение имеет чрезвычайно сложный вид. В этой связи, как правило, отдельно рассматриваются те случаи, которые сравнительно легко реализуются в ФА–эксперименте. Для рассматриваемого двухслойного образца с объёмным поглощением обоих слоев, в зависимости от соотношения между толщинами образца $l_{S(i)}$, длиной пробега фотона $\mu_{\beta(i)}(\omega)=\beta_i^{-1}$ и длиной тепловой диффузии $\mu_{2(i)}(\omega)$ в соответствующих слоях, таких вариантов порядка десяти. С точки зрения оптических свойств для каждого из слоёв возможны два случая: прозрачный и непрозрачный. Между тем, очевидно, что нелинейный ФА–отклик существенен лишь для сильнопоглощающих систем. Это означает, что случай, когда оба слоя являются прозрачными и оптические параметры удовлетворяют условию $\beta_i l_{S(i)} << 1$, выпадает из рассмотрения.

Нами детально исследован случай, когда первый слой является сильнопоглощающим и $l_{S(1)} >> \mu_{\beta(1)}$, $\exp(-l_{S(1)}\beta_1) \approx 0$.

А). Оба слоя являются термически толстыми с условиями $l_{S(1)} >> \mu_{\beta(1)}(\omega)$, $l_{S(1)} >> \mu_{2S(1)}(\omega)$, $\mu_{2S(1)} >> \mu_{\beta(1)}(\omega)$, $l_{S(2)} >> \mu_{2S(2)}(\omega)$. Для этого случая из (30) и (31) получим

$$\delta p_{2(1)}(2\omega) = \frac{\gamma p_0}{T_{00} l_g} \frac{I_0^2 (A_{S(1)}^{(0)})^2 \mu_{2g} \mu_{2S(1)}^2}{8\sqrt{2}(k_{S(1)}^{(0)})^2} e^{-i\pi/4} K_{2N(1)}(l_{S(1)} >> \mu_{2S(1)}, \mu_{2S(1)} >> \mu_{\beta 1}, l_{S(2)} >> \mu_{2g}\} \,. \qquad (32)$$

Б).Первый слой является термически тонким, а второй- термически толстым с условиями $l_{S(1)} >> \mu_{\beta(1)}(\omega)$, $l_{S(1)} << \mu_{2S(1)}(\omega)$, $\mu_{2S(1)} >> \mu_{\beta(1)}(\omega)$ и $l_{S(2)} >> \mu_{2S(2)}(\omega)$. Выполнив необходимые вычисления в (30) и (31), получим

$$\delta p_{2(2)}(2\omega) = \frac{\gamma p_0}{T_{00} l_g} \frac{I_0^2 (A_{S(1)}^{(0)})^2 \mu_{2g} \mu_{2S(2)}^2 e^{-i\pi/4}}{8\sqrt{2}(k_{S(2)}^{(0)})^2} K_{2N(3)}(l_{S(1)} << \mu_{2S(1)}, \mu_{2S(1)} >> \mu_{\beta 1}, l_{S(2)} >> \mu_{2S(2)}) \qquad (33)$$

В выражениях (32) и (33) величины

$$K_{2N}(l_{S(i)} >> \mu_{2S(i),} \mu_{2S(1)} >> \mu_{\beta 1}\} = \frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}(2\delta_{2g} - \delta_g - 2\delta_{2S(1)} - \sqrt{2}\delta_{S(1)}) + \sqrt{2}(\delta_{3S(1)} + \delta_{4S(1)}),$$

$$K_{2N(3)}(l_{S(1)} << \mu_{2S(1),} |r_1| > 1, l_{S(2)} >> \mu_{2S(2)}\} = \frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}(2\delta_{2g} - \delta_g - 2\delta_{2S(2)} - \sqrt{2}\delta_{S(2)}) + \sqrt{2}(\delta_{3S(1)} + \delta_{4S(1)})$$

являются нелинейными коэффициентами для соответствующих случаев и состоят из комбинации термических коэффициентов теплофизических параметров, поглощательной способности слоев. Из выражений (32) и (33) видно, что частотная зависимость амплитуды возбуждаемых сигналов в этих случаях $\sim \omega^{-3/2}$. Из вида нелинейных коэффициентов следует, что в двух рассмотренных случаях:

1) эти коэффициенты зависят от термических коэффициентов теплофизических параметров газового слоя и образца;

2) влияние термических коэффициентов степени черноты и оптического коэффициента поглощения первого слоя входят аддитивно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Измерения характеристик второй гармоники ФА- сигнала открывают возможность одновременного определения как теплофизических и оптических параметров двухслойных полупрозрачных образцов, так и их термических коэффициентов (выражения (32) и (33)). Следовательно, измерение амплитуды ВГ ФА– сигнала позволяет определить величину термического коэффициента и, тем самым, температурную зависимость величины коэффициента оптического поглощения системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.**Мадвалиев У.,Салихов Т.Х.,Шарифов Д.М. и др.**Нелинейный фотоакустический отклик непрозрачных сред при газомикрофонной регистрации сигнала // ЖПС. 2006. Т.73. № 2. С. 170−176.
2. **Мадвалиев У., Салихов Т.Х., Шарифов Д.М.** Влияние тепловой нелинейности сильнопоглощающих сред на параметры фотоакустического сигнала при газомикрофонной регистрации. Основная и вторая гармоники //ЖТФ. 2006.Т.76.№ 6. С. 87−97.
3.**Салихов Т.Х., Шарифов Д.М., Туйчиев Х.Ш.,** Влияние температурной зависимости оптических величин на характеристики основной гармоники нелинейного фотоакустичекого сигнала твёрдых тел с объёмным // Докл. АН РТ, 2011. Т. 54. №6. С. 465-472.
4.**Салихов Т.Х.**Тепловая нелинейность в оптоакустике(обзор).Часть III. Тепловая нелинейност в фотоакустике. . Известия АН РТ, Отд.физ.-мат., хим, геол. и техн.н**.,** 2011, №4(145), С.76-85.
5.**Салихов, Т.Х. Ходжаев. Ю.П.** Теория генерации второй гармоники нелинейного фотоакустического отклика двухслойных полупрозрачных образцов . // Докл. АН РТ, 2012. Т.55.-№ 12.С.965-974.
6.**Салихов Т.Х.,.Махмалатиф А., .Ходжаев Ю.**П и др. Теория генерации второй гармоники нелинейного фотоакустического сигнала оптически неоднородными твердыми телами// ДАН РТ, 2015, Т. №,58, С. 804-812.
7.**Fujii F.Y., Akihiro Moritani and Junkichi Nakai.** Photoacoustic Spectroscopy Theory for Multi - Layered Samples and Interference Effect // Jpn. J. Appl. Phys. V. 20. № 2. 1981.P.361-367.

T.Kh.Salikhov, A.Mahmalatif, Y.P.Khodjaev

Research Institute of Science, Tajik National University, Dushanbe, Tajikistan.
734025,Dushanbe, Rudaki Ave., 17, E-mail: tsalikhov@mail.ru

THEORY THE GENERATION OF SECOND HARMONIC PHOTOACOUSTIC SIGNAL OF THE BILAYER OPTICAL INHOMOGENEOUS SOLIDS

The theory of generation of the second harmonic of a nonlinear photoacoustic signal by optically inhomogeneous bilayer solid samples is proposed. It is established that for the most interesting cases that occur in the experiment, the amplitude of this harmonic of the PA signal is simply related to the thermal coefficient of the optical absorption coefficient of both layers of the sample. Consequently, measurement of the amplitude of the PA signal allows us to determine the value of the thermal coefficient and, thus, the temperature dependence of the optical absorption coefficient of the system.

PHOTOACOUSTIC, THERMAL NONLINEARITY, NONLINEAR PHOTOACOUSTIC RESPONSE, SECOND HARMONIC