



**Четырнадцатая Международная научно-техническая конференция  
«Оптические методы исследования потоков»  
Москва, 26 – 30 июня 2017 г.**

УДК 535.8

В.И. Смирнов

*Московский энергетический институт (технический университет), Россия,  
111250, Москва, Красноказарменная ул., 14, E-mail: omfi@tpei.ac.ru*

**АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОЛЯРИЗАЦИИ  
КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ  
ИНФОРМАЦИИ**

**АННОТАЦИЯ**

Методами параметрической теории информации исследованы минимальные дисперсионные границы оценок параметров Стокса частично поляризованного квазимонохроматического излучения в поляриметрической схеме с анализатором и фазовым компенсатором в условиях нормального аддитивного шума. На основе анализа распределений плотности информации о параметрах Стокса и их комбинаций по факторам угла поворота анализатора и фазового сдвига компенсатора дано обоснование существующим и найдены новые оптимальные планы измерений. Найдены соответствующие этим планам дисперсионные матрицы. Выведены формулы для получения эффективных оценок. Рассчитаны предельные погрешности оценок различных параметров поляризации. Результаты анализа подтверждены методом численного моделирования.

**ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ, ЭФФЕКТИВНЫЕ ОЦЕНКИ, ПАРАМЕТРЫ СТОКСА, СТЕПЕНЬ ПОЛЯРИЗАЦИИ, КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**ВВЕДЕНИЕ**

Широкое применение поляризационных устройств в лазерной технике, в лазерных системах диагностики потоков жидкости и газа [1] делает актуальной задачу прецизионного измерения характеристик поляризации излучения. Существуют разные способы измерений состояния поляризации. Изобретено множество устройств их реализующих [2]. Целью работы является определение эффективности и предельной точности поляризационных измерений на основе теории информации и нелинейного параметрического оценивания [3-5]. Состояние поляризации квазимонохроматической волны можно задавать разными способами. Во многих случаях удобно использовать параметры Стокса, которые имеют одинаковую размерность, являются действительными величинами, и имеют наглядную интерпретацию координат точки на сфере Пуанкаре [6]. Параметры Стокса широко используются в кристаллографии и квантовой физике.

**ЭФФЕКТИВНЫЕ ПЛАНЫ ИЗМЕРЕНИЙ**

**Параметрическая модель**

Анализ поляризационных измерений целесообразно провести, используя схему регистрации с поляризатором и фазовым компенсатором, в которой можно сканировать угол

поворота поляризатора  $\theta$  и фазовую задержку  $\epsilon$ , вносимую компенсатором. На вход поступает анализируемое изучение, на выходе измеряется интенсивность прошедшей волны. Состояние поляризации квазимохроматической волны можно задавать разными способами. В данной работе используем подход, основанный на применении параметров Стокса.

Параметрической моделью задачи является функциональная зависимость выходной величины от факторов  $\theta, \epsilon$  и искомых параметров Стокса входного излучения. Такую модель нетрудно получить, используя формулу из [6]

$$I(\theta, \epsilon) = I_{xx} \cos^2 \theta + I_{yy} \sin^2 \theta + I_{xy} e^{-i\epsilon} \sin \theta \cos \theta + I_{yx} e^{i\epsilon} \sin \theta \cos \theta,$$

которая выражает выходную интенсивность для произвольных факторов  $\theta, \epsilon$  через элементы матрицы когерентности  $\mathbf{J}$  квазимохроматического излучения

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{pmatrix},$$

$$I_{xx} = \langle E_x E_x^* \rangle \quad I_{yy} = \langle E_y E_y^* \rangle \quad I_{xy} = \langle E_x E_y^* \rangle \quad I_{yx} = \langle E_y E_x^* \rangle,$$

где  $E_x, E_y$  - проекции светового вектора на оси координат, угловые скобки – знак статистического усреднения; звездочка – знак комплексного сопряжения.

Используя известную связь между параметрами Стокса и элементами матрицы когерентности

$$s_0 = I_{xx} + I_{yy} \quad s_1 = I_{xx} - I_{yy} \quad s_2 = I_{xy} + I_{yx} \quad s_3 = i(I_{xy} - I_{yx}),$$

для искомой модели найдем

$$I(\theta, \epsilon; \mathbf{s}) = \frac{s_0}{2} + \frac{s_1}{2} \cos(2\theta) + \frac{s_2}{2} \sin(2\theta) \cos(\epsilon) + \frac{s_3}{2} \sin(2\theta) \sin(\epsilon). \quad (1)$$

Формула (1) задает 2-факторную 4-параметрическую модель. Факторы:  $\theta$  – угол поворота анализатора,  $\epsilon$  – сдвиг фаз, задаваемый компенсатором. Параметрами модели являются параметры Стокса, обозначенные вектором  $\mathbf{s}=(s_0, s_1, s_2, s_3)$ .

### Нормированная дисперсионная матричная граница оценок параметров Стокса

Качество оценок вектора параметров  $\mathbf{s}=(s_0, s_1, s_2, s_3)$  удобно характеризовать дисперсионной матрицей, диагональные элементы которой дают дисперсии оценок параметров, а недиагональные элементы характеризуют взаимную коррелированность соответствующих оценок.

Согласно теореме Рао-Крамера [3] существует нижняя граница для дисперсионной матрицы оценок, называемая минимальной дисперсионной матричной границей (МДМГ). Она определяет теоретическую предельную точность совместного оценивания параметров, потенциально достижимую при заданной статистике погрешностей измерений, при полном использовании информации, полученной из эксперимента с учетом априорных данных. МДМГ может быть найдена как матрица, обратная информационной матрице  $\mathbf{IM}$ , определяемой выражением

$$\mathbf{IM} = m_1 \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \ln P \right) \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \ln P \right)^T \right], \quad (2)$$

в котором  $m_1$  – знак математического ожидания ;  $\left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \ln P \right)$  – вектор-столбец с элементами  $\left( \frac{\partial}{\partial s_i} \ln P \right)$ , верхний индекс  $T$  используется для обозначения операции транспонирования;  $P$  – функция правдоподобия или условная плотность вероятности  $w(I|\mathbf{s})$ , рассматриваемая как функция  $I$  при фиксированном  $\mathbf{s}$ .

Результаты измерений можно представить в виде серии отсчетов выходной интенсивности, полученных при различных факторах  $\theta_k (k = 0, 1, \dots, m)$ ,  $\varepsilon_l (l = 0, 1, \dots, n)$

$$\hat{I}_{k,l} = I(\theta_k, \varepsilon_l; \mathbf{s}) + \Delta I_{k,l}, \quad (3)$$

где  $\Delta I_{k,l}$  - погрешность единичного отсчета. Предположим, что  $\Delta I_{k,l}$  для любых точек являются нормально распределенными случайными величинами с нулевым средним значением и одинаковым стандартным отклонением  $\sigma_I$ , причем различные отсчеты ( $k \neq l$ ) взаимно не коррелированы. При сделанных предположениях функция правдоподобия принимает вид

$$P = \prod_k \prod_l \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_I} \exp \left\{ - \frac{[\hat{I}_{k,l} - I(\theta_k, \varepsilon_l; \mathbf{s})]^2}{2\sigma_I^2} \right\}, \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1) для элементов информационной матрицы получим

$$IM_{ij} = \frac{1}{\sigma_I^2} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial s_i} [I(\theta_k, \varepsilon_l; \mathbf{s})] \frac{\partial}{\partial s_j} [I(\theta_k, \varepsilon_l; \mathbf{s})]. \quad (5)$$

Формулы (1), (5) позволяют рассчитать информационную матрицу для любого набора точек в плоскости  $(\theta, \varepsilon)$ . Вопрос в том, в каких точках проводить измерения, чтобы оценить параметры Стокса с максимальной точностью за минимальное время. Учтем, что для нормального шума  $\sigma_I^2 = G/\tau$ ,  $G$  – плотность мощности шума,  $\tau$  - время измерения в одной точке. Для корректности сравнения информационных и дисперсионных матриц при различных планах, следует ориентироваться на их значения, приведенные к единому времени  $T=N\tau$ ,  $N$ - общее число точек, в которых проводятся измерения. Поэтому далее будем оценивать нормированные матрицы, приведенные к единичному общему времени измерения  $T$  и единичной плотности мощности шума  $G$ . Элементы нормированной информационной матрицы оценок параметров Стокса  $\mathbf{IN}$  определяются выражением

$$IN_{i,j} = \frac{1}{m \cdot n} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial s_i} [I(\theta_k, \varepsilon_l; \mathbf{s})] \frac{\partial}{\partial s_j} [I(\theta_k, \varepsilon_l; \mathbf{s})]. \quad (6)$$

Условие нормировки означает, что след информационной матрицы постоянен и равен  $\text{tr}(\mathbf{IN})=0,5$ . Физика в том, что интенсивность на выходе равна половине интенсивности на

входе.

Соответственно, нормированная МДМГ определяется как обратная матрице  $\mathbf{IN}$ :

$$\mathbf{DN} = (\mathbf{IN})^{-1} \quad (7)$$

Рассмотрим сначала планы измерений с равномерным шагом по углам  $\theta$  и  $\varepsilon$  в точках  $\theta_k = \pi k / m, k = 0, \dots, m-1$  и  $\varepsilon_l = \pi l / n, l = 0, \dots, n-1$ . Расчеты по формулам (6) и (7) для любых  $m \geq 3, n \geq 2$  в этом случае дают один и тот же результат:

$$\mathbf{DN} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Согласно (8) оценки являются некоррелированными, а определитель  $|\mathbf{DN}| = 8192$ .

Укажем, в частности, что в случае  $m = 3, n = 2$  по такому плану необходимо провести 6 измерений выходной интенсивности при значениях угловых координат  $(\theta, \varepsilon)$ , приведенных в табл. 1.

Таблица 1

№	1	2	3	4	5	6
$\theta$	0	$\pi/2$	$\pi$	0	$\pi/2$	$\pi$
$\varepsilon$	0	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$

Согласно модели (1) в отсутствие шумов план I дает систему из шести следующих уравнений для определения четырех параметров Стокса:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{s_0}{2} + \frac{s_1}{2} & I_2 &= \frac{s_0}{2} - \frac{s_1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}s_2 & I_3 &= \frac{s_0}{2} - \frac{s_1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}s_2 \\ I_4 &= \frac{s_0}{2} + \frac{s_1}{2} & I_5 &= \frac{s_0}{2} - \frac{s_1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}s_3 & I_6 &= \frac{s_0}{2} - \frac{s_1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}s_3 \end{aligned} \quad (9)$$

Из системы (9), взяв в качестве решения средневзвешенные значения из нескольких имеющихся, получим

$$\begin{aligned} \hat{s}_0 &= \frac{1}{3}(\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 + \hat{I}_4 + \hat{I}_5 + \hat{I}_6), & \hat{s}_1 &= \frac{1}{3}(2\hat{I}_1 - \hat{I}_2 - \hat{I}_3 + 2\hat{I}_4 - \hat{I}_5 - \hat{I}_6), \\ \hat{s}_2 &= \frac{2\sqrt{3}}{3}(\hat{I}_2 - \hat{I}_3), & \hat{s}_3 &= \frac{2\sqrt{3}}{3}(\hat{I}_5 - \hat{I}_6). \end{aligned} \quad (10)$$

(Здесь и далее крышечка сверху над буквой означает оценку соответствующей величины.)

По формулам вычисления погрешностей при косвенных измерениях можно найти дисперсионную матрицу оценок параметров Стокса (10):

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix}.$$

Нормированная дисперсионная матрица оценок параметров Стокса находится умножением  $\mathbf{D}$  на число отсчетов  $N$ . В данном случае  $N=6$ , поэтому результат идентичен  $\mathbf{DN}$  (8), то есть формулы (10) дают наилучшие оценки из возможных в рамках планов с постоянным шагом.

### Распределение плотности информации и оптимальный план измерений

При непрерывном сканировании точек измерения по  $\theta$  и  $\varepsilon$  в течение времени  $T=1$  с постоянной скоростью, в соответствие с (6), не трудно получить интегральное выражение

$$IN_{i,j} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\frac{\pi_0}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi_0}^{\pi} \frac{\partial}{\partial s_i} [I(\theta, \varepsilon; \mathbf{s})] \frac{\partial}{\partial s_j} [I(\theta, \varepsilon; \mathbf{s})] d\theta d\varepsilon,$$

которое дает для  $\mathbf{DN}$  результат, полностью совпадающий с (8). Кроме того, из полученного интегрального выражения следует, что для оптимального выбора числа и координат точек, в которых следует проводить измерения, при их произвольном расположении, полезно ввести

понятие плотности информации  $ws_i(\theta, \varepsilon) = \left[ \frac{\partial I(\theta, \varepsilon; \mathbf{s})}{\partial s_i} \right]^2$  и рассмотреть распределения

$ws_i(\theta, \varepsilon)$ , ( $i=0,1,2,3$ ). Поскольку  $ws_0 = \frac{1}{4}$  не зависит от  $(\theta, \varepsilon)$ , любая точка одинаково

информативна по параметру  $s_0$ . Картину распределения плотности информации

$ws_1 = \frac{1}{4} [\cos(2\theta)]^2$  показана на рис. 1,  $ws_1$  не зависит от  $\varepsilon$  и имеет максимумы при  $\theta = 0$  и

$\theta = \pi/2$ . Картину распределения плотности информации  $ws_2 = \frac{1}{4} [\sin(2\theta)\cos(\varepsilon)]^2$

представлена на рис. 2 и показывает, что существует две наиболее информативные точки для определения параметра  $s_2$  с координатами  $(\pi/2, 0)$  и  $(3\pi/4, 0)$ . Картину распределения

плотности информации  $ws_3 = \frac{1}{4} [\sin(2\theta)\sin(\varepsilon)]^2$  представлена на рис. 3 и показывает, что

существует две наиболее информативные точки для определения параметра  $s_3$  с координатами  $(\pi/4, \pi/2)$  и  $(3\pi/4, \pi/2)$ .

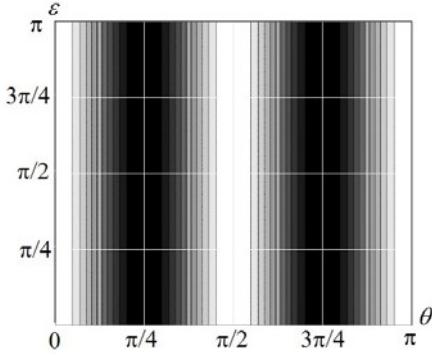


Рис.1. Распределение плотности информации  $WS_1$

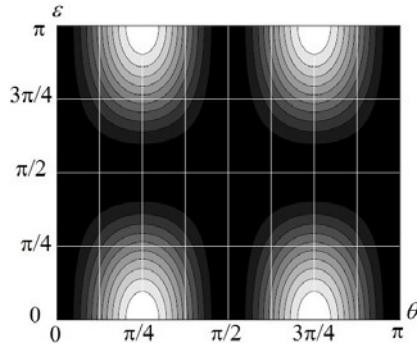


Рис.2. Распределение плотности информации  $WS_2$

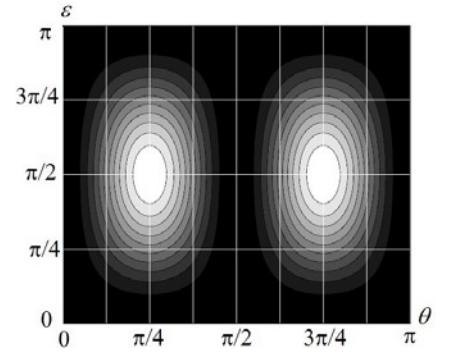


Рис.3. Распределение плотности информации  $WS_3$

Таким образом, получает обоснование следующий 6-точечный план, представленный в табл. 2.

Таблица 2

№	1	2	3	4	5	6
$\theta$	0	$\pi/2$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$3\pi/4$
$\varepsilon$	0	0	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$

Соответствующий плану (табл. 2) расчет нормированной МДМГ по алгоритмам (6),(7) дает

$$\mathbf{DN} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Согласно (11) оценки являются некоррелированными, а определитель  $|\mathbf{DN}| = 6912$ .

Согласно модели (1) в отсутствие шумов план II дает систему из шести следующих уравнений для определения четырех параметров Стокса:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{S_0}{2} + \frac{S_1}{2} & I_2 &= \frac{S_0}{2} - \frac{S_1}{2} & I_3 &= \frac{S_0}{2} + \frac{S_2}{2} \\ I_4 &= \frac{S_0}{2} - \frac{S_2}{2} & I_5 &= \frac{S_0}{2} + \frac{S_3}{2} & I_6 &= \frac{S_0}{2} - \frac{S_3}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

Из системы (12), взяв в качестве решения средневзвешенные значения из нескольких имеющихся, можно получить

$$\hat{s}_0 = \frac{1}{3}(\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 + \hat{I}_4 + \hat{I}_5 + \hat{I}_6), \quad \hat{s}_1 = \hat{I}_1 - \hat{I}_2, \quad \hat{s}_2 = \hat{I}_3 - \hat{I}_4, \quad \hat{s}_3 = \hat{I}_5 - \hat{I}_6. \quad (13)$$

По формулам вычисления погрешностей при косвенных измерениях можно убедиться, что нормированная дисперсионная матрица оценок параметров Стокса (13), идентична  $\mathbf{DN}$  (11), то есть формулы (13) дают эффективные оценки.

Анализ показывает, что именно план (табл. 2) и оценки (13) позволяют провести измерения параметров Стокса с максимальной точностью за минимальное время. Отметим, что этот план представлен в классической монографии [6], однако, приведенная там формула

$\hat{s}_0 = \hat{I}_1 + \hat{I}_2$  для оценки нулевого параметра не учитывает в полном объеме информацию, содержащуюся в отсчетах (12), что ведет к потере точности. Нормированная дисперсионная матрица при этом имеет вид

$$\mathbf{DN} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{DN}| = 20736. \quad (11')$$

Определитель матрицы (11') в три раза превышает определитель матрицы (11). Поэтому, очевидно, что нужно использовать еще две независимые оценки  $\hat{s}_0 = \hat{I}_3 + \hat{I}_4$ ,  $\hat{s}_0 = \hat{I}_5 + \hat{I}_6$  и формулы (13) для получения эффективного результата.

В принципе для определения 4-х параметров может хватить и пяти и четырех отсчетов. Рассмотрение таких планов показывает, что в этом случае возникает коррелированность оценок параметров Стокса, МДМГ теряет диагональный вид, а определитель  $|\mathbf{DN}|$  существенно возрастает. Например, для плана (табл. 2) без точки 2

$$\mathbf{DN} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{DN}| = 10000.$$

Тот же план без двух точек 2 и 5 дает

$$\mathbf{DN} = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 & -8 \\ -8 & 24 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ -8 & 8 & 0 & 24 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{DN}| = 16384.$$

### Другие оптимальные планы и матричные границы

Что касается других планов, полезно рассмотреть картины распределений произведений плотностей информаций  $p_{12} = ws_1ws_2$ ,  $p_{13} = ws_1ws_3$ ,  $p_{23} = ws_2ws_3$  и  $p_{123} = ws_1ws_2ws_3$ , показанные на рис.4-7 соответственно.

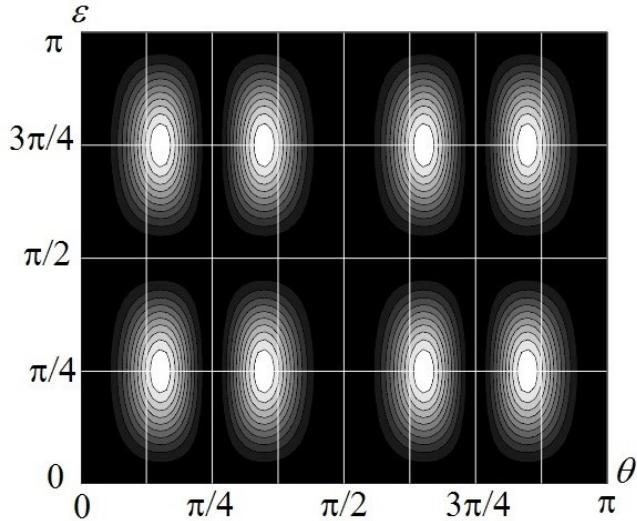


Рис. 4. Распределение произведения плотностей информаций  $ws_1 ws_2 ws_3$

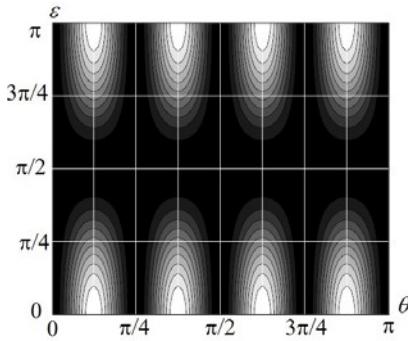


Рис. 5. Распределение произведения плотностей информаций  $ws_1 ws_2$

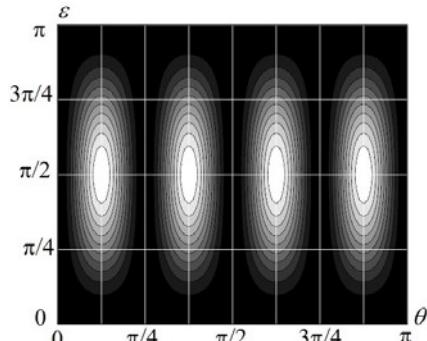


Рис. 6. Распределение произведения плотностей информаций  $ws_1 ws_3$

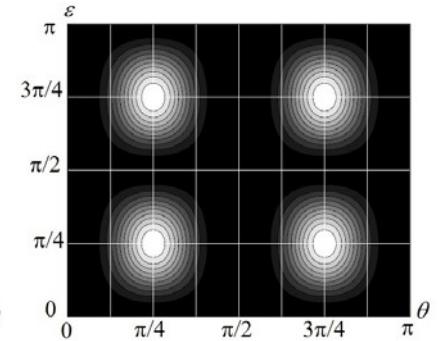


Рис. 7. Распределение произведения плотностей информаций  $ws_2 ws_3$

Расположение максимумов на рис.4 определяет следующий 8-точечный план, представленный в табл. 3.

Таблица 3

№	1	2	3	4	5	6	7	8
$2\theta$	$\alpha^*$	$\pi - \alpha^*$	$\pi + \alpha^*$	$2\pi - \alpha^*$	$\alpha^*$	$\pi - \alpha^*$	$\pi + \alpha^*$	$2\pi - \alpha^*$
$\varepsilon$	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$3\pi/4$	$3\pi/4$	$3\pi/4$

$$\alpha^* = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Расчет, соответствующий плану (табл. 3), нормированной МДМГ по алгоритмам (6),(7) дает идентичную (12) матрицу с определителем  $|\mathbf{DN}|=6912$ . Нетрудно найти и формулы, реализующие этот 8-точечный план:

$$\begin{aligned} \hat{s}_0 &= \frac{1}{4} (\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 + \hat{I}_4 + \hat{I}_5 + \hat{I}_6 + \hat{I}_7 + \hat{I}_8) & \hat{s}_1 &= \frac{\sqrt{3}}{4} (\hat{I}_1 - \hat{I}_2 - \hat{I}_3 + \hat{I}_4 + \hat{I}_5 + \hat{I}_6 - \hat{I}_7 + \hat{I}_8) \\ \hat{s}_2 &= \frac{\sqrt{6}}{4} (\hat{I}_1 + \hat{I}_2 - \hat{I}_3 - \hat{I}_4) & \hat{s}_3 &= \frac{\sqrt{6}}{4} (\hat{I}_5 + \hat{I}_6 - \hat{I}_7 - \hat{I}_8) \end{aligned} \quad (14)$$

В метрологическом отношении план (табл. 3) эквивалентен плану (табл. 3), но является более трудоемким, и его применение на практике нецелесообразно. Вместе с тем, отталкиваясь от него, стоит рассмотреть следующий 8-точечный план

Таблица 4

№	1	2	3	4	5	6	7	8
$\theta$	$\pi/6$	$2\pi/6$	$4\pi/6$	$5\pi/6$	$\pi/6$	$2\pi/6$	$4\pi/6$	$5\pi/6$
$\varepsilon$	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$3\pi/4$	$3\pi/4$	$3\pi/4$

Расчеты по формулам (6) и (7) для плана IV дают МДМГ диагонального вида:

$$\mathbf{DN} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10,667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10,667 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{DN}| = 7282 . \quad (15)$$

Согласно модели (1) в отсутствие шумов план (19) дает систему из восьми следующих уравнений для определения четырех параметров Стокса:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{s_0}{2} + \frac{s_1}{4} + \frac{\sqrt{6}s_2}{8} + \frac{\sqrt{6}s_3}{8} & I_2 &= \frac{s_0}{2} - \frac{s_1}{4} + \frac{\sqrt{6}s_2}{8} + \frac{\sqrt{6}s_3}{8} \\ I_3 &= \frac{s_0}{2} - \frac{s_1}{4} - \frac{\sqrt{6}s_2}{8} - \frac{\sqrt{6}s_3}{8} & I_4 &= \frac{s_0}{2} + \frac{s_1}{4} - \frac{\sqrt{6}s_2}{8} - \frac{\sqrt{6}s_3}{8} \\ I_5 &= \frac{s_0}{2} + \frac{s_1}{4} - \frac{\sqrt{6}s_2}{8} + \frac{\sqrt{6}s_3}{8} & I_6 &= \frac{s_0}{2} - \frac{s_1}{4} - \frac{\sqrt{6}s_2}{8} + \frac{\sqrt{6}s_3}{8} \\ I_7 &= \frac{s_0}{2} - \frac{s_1}{4} + \frac{\sqrt{6}s_2}{8} - \frac{\sqrt{6}s_3}{8} & I_8 &= \frac{s_0}{2} + \frac{s_1}{4} + \frac{\sqrt{6}s_2}{8} - \frac{\sqrt{6}s_3}{8} \end{aligned} \quad (16)$$

Из системы (16), взяв в качестве решения средневзвешенные значения из нескольких имеющихся, получаем

$$\begin{aligned} \hat{s}_0 &= \frac{1}{4}(\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 + \hat{I}_4 + \hat{I}_5 + \hat{I}_6 + \hat{I}_7 + \hat{I}_8) & \hat{s}_1 &= \frac{1}{2}(\hat{I}_1 - \hat{I}_2 - \hat{I}_3 + \hat{I}_4 + \hat{I}_5 - \hat{I}_6 - \hat{I}_7 + \hat{I}_8) \\ \hat{s}_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{I}_1 + \hat{I}_2 - \hat{I}_3 - \hat{I}_4 - \hat{I}_5 - \hat{I}_6 + \hat{I}_7 + \hat{I}_8) & \hat{s}_4 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{I}_1 + \hat{I}_2 - \hat{I}_3 - \hat{I}_4 + \hat{I}_5 + \hat{I}_6 - \hat{I}_7 - \hat{I}_8) \end{aligned} \quad (17)$$

По формулам вычисления погрешностей при косвенных измерениях убеждаемся, что нормированная дисперсионная матрица оценок параметров Стокса (17), идентична МДМГ (15). Особенностью этого плана является улучшение оценок  $s_2$  и  $s_3$  в сравнение с наилучшим с точки зрения минимальной величины определителя планом (табл. 2).

Того же эффекта можно достичь 10-точечным планом (табл.5), если отталкиваться от плана (табл.2), повторяя измерения в точках 3,4,5,6.

Таблица 5

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\theta$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$3\pi/4$
$\varepsilon$	0	0	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$

$$\mathbf{DN} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{DN}| = 8000. \quad (18)$$

Тот же результат (18) можно получить, варьируя время измерения в точках 6-точечного (табл. 2).

В последнем случае, переходя к пределу, можно вообще не проводить измерения в тех точках, которые не содержат информацию о нужных параметрах. При необходимости мерить лишь  $s_1, s_2$  или  $s_1, s_3$  или  $s_2, s_3$  получаем соответственно в рамках 4-точечных планов:

$$\mathbf{DN} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}, \quad \mathbf{DN} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{DN} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Планы таких измерений легко читаются по координатам максимумов на рис.4,5,6. Формулы, реализующие эти планы, легко найти из уравнений системы (12).

При необходимости мерить лишь  $s_1$  или  $s_2$  или  $s_3$  получаем соответственно в рамках 2-точечных планов:

$$\mathbf{DN} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}, \quad \mathbf{DN} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}, \quad \mathbf{DN} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Наконец отметим, что существует возможность прямой оценки нулевого параметра, путем измерения входной интенсивности  $\hat{I}_{BX} = \hat{s}_0$ . Добавляя этот отсчет к 6-ти отсчетам плана (табл. 2), получаем 7-точечный план с МДМГ диагонального вида:

$$\mathbf{DN} = \begin{pmatrix} 2,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{DN}| = 7683. \quad (19)$$

Достижение МДМГ (19) обеспечивается вычислениями по формулам:

$$\hat{s}_0 = \frac{1}{5}(\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 + \hat{I}_4 + \hat{I}_5 + \hat{I}_5 + \hat{I}_6) + \frac{2}{5}\hat{I}_{BX}, \quad \hat{s}_1 = \hat{I}_1 - \hat{I}_2, \quad \hat{s}_2 = \hat{I}_3 - \hat{I}_4, \quad \hat{s}_3 = \hat{I}_5 - \hat{I}_6. \quad (20)$$

Отметим, что след нормированной информационной матрицы в этом случае равен  $\text{tr}(\mathbf{DN}^{-1}) = 0,571 > 0,5$ . Это связано с тем, что в дополнительном измерении на детектор воздействует весь входной световой поток.

Таким образом, можно заметить, что существует три способа менять соотношения между дисперсионными коэффициентами: повторные измерения в определенных точках, сдвиг точек измерения, неравноточные измерения.

## Планы и матричные граници при неравноточных измерениях

Реализация неравноточных измерений в случае нормального аддитивного шума сводится к варьированию времени измерения в разных точках  $\tau_m$  при сохранении общего времени  $T$ .

Обобщая (5) на случай неравноточных измерений  $\sigma_i^2 = \sigma_i^2(\tau_m) = G/\tau_m$  в  $N$  произвольных точка с координатами  $(\theta_m, \varepsilon_m)$ , ( $m=0,1,\dots,N$ ), элементы нормированной информационной матрицы  $\mathbf{IN}$ , для которой плотность мощности шума  $G=1$  и общее время измерений  $T = \sum_{m=0}^{N-1} \tau_m = 1$ , можно представить в виде

$$IN_{ij} = \sum_{m=0}^{N-1} \tau_m \frac{\partial}{\partial s_i} [I(\theta_m, \varepsilon_m; s)] \frac{\partial}{\partial s_j} [I(\theta_m, \varepsilon_m; s)]. \quad (21)$$

Далее удобно взять за основу оптимальный по минимуму  $|DN|$  6-точечный план (табл.2), который с учетом (21) можно представить в виде таблицы 6.

Таблица 6

$m$	0	1	2	3	4	5
$\theta$	0	$\pi/2$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$3\pi/4$
$\varepsilon$	0	0	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$
$\tau_m$	$\tau_0$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$	$\tau_5$

Анализ показывает, что оценки параметров Стокса в этом случае являются некоррелированными и, соответственно, нормированная информационная матрица  $\mathbf{IN}$  (21) и нормированная дисперсионная матрица  $\mathbf{DN} = \mathbf{IN}^{-1}$  имеют диагональный вид при условиях:

$$\tau_0 = \tau_1 = \tau'; \quad \tau_2 = \tau_3 = \tau''; \quad \tau_4 = \tau_5 = \tau'''.$$

Причем, элементы номерованной дисперсионной матрицы равны:

$$DN_{0,0} = 4; \quad DN_{1,1} = \frac{2}{\tau'}; \quad DN_{2,2} = \frac{2}{\tau''}; \quad DN_{3,3} = \frac{2}{\tau'''}$$

Соотношения между нормированными дисперсиями оценок параметров Стокса можно менять, варьируя время измерений в точках плана (табл.6). Тем самым можно обеспечивать преимущество в точности оценки того или иного параметра. Соответственно,  $DN_{1,1}, DN_{2,2}, DN_{3,3}$  могут принимать различные значения при соблюдении условия

$$\frac{1}{DN_{1,1}} + \frac{1}{DN_{2,2}} + \frac{1}{DN_{3,3}} = \frac{1}{4}.$$

Оценки параметров Стокса при таких планах должны рассчитываться по формулам:

$$\hat{s}_0 = (\hat{I}_0 + \hat{I}_1)\tau' + (\hat{I}_2 + \hat{I}_3)\tau'' + (\hat{I}_4 + \hat{I}_5)\tau''', \quad \hat{s}_1 = \hat{I}_0 - \hat{I}_1, \quad \hat{s}_2 = \hat{I}_2 - \hat{I}_3, \quad \hat{s}_3 = \hat{I}_4 - \hat{I}_5.$$

### Эффективные оценки других параметров поляризации

Любой параметр поляризации может быть выражен как некоторая функция параметров Стокса  $p = f(s_0, s_1, s_2, s_3)$ . Минимальная дисперсия  $(\sigma p)_{min}^2$  вычисляется по правилам расчета погрешности косвенных измерений. Для МДМГ диагонального вида расчет производится по формуле

$$(\sigma p)_{min}^2 = \sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial p}{\partial s_i} \right)^2 (\sigma s_i)^2. \quad (25)$$

Какой план наиболее эффективен, зависит от конкретного вида функции  $f(s_0, s_1, s_2, s_3)$  и от интересующего диапазона изменения параметров Стокса. Рассмотрим примеры, используя планы, соответствующие следующим четырем характерным нормированным дисперсионным матрицам:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

$$|\mathbf{A}| = 6912, \quad |\mathbf{B}| = 8192, \quad |\mathbf{C}| = 8000, \quad |\mathbf{D}| = 9216.$$

$$\text{tr}(\mathbf{A}^{-1}) = \text{tr}(\mathbf{B}^{-1}) = \text{tr}(\mathbf{C}^{-1}) = \text{tr}(\mathbf{D}^{-1}) = 1/2.$$

Матрица  $\mathbf{A}$  получается по плану (табл.6) при  $\tau' = \tau'' = \tau''' = 1/6$  и соответствует уже рассмотренному случаю равноточных измерений плана (табл.2). Матрица  $\mathbf{B}$  получается по плану (табл.6) при  $\tau' = 1/4, \tau'' = \tau''' = 1/8$  и соответствует рассмотренному случаю равномерного распределения точек в плоскости  $(\Theta, \varepsilon)$  (см. матрицу (8)). Матрица  $\mathbf{C}$  получается по плану (табл.6) при  $\tau' = 1/10, \tau'' = \tau''' = 1/5$ . Матрица  $\mathbf{D}$  получается по плану (табл.6) при  $\tau' = 1/4, \tau'' = 1/12, \tau''' = 1/6$ .

Для нормированной минимальной дисперсии параметра  $p$  из (25) следует

$$DNp = \sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial p}{\partial s_i} \right)^2 DN_{i,i}. \quad (26)$$

Степень поляризации  $P$  выражается через параметры Стокса следующим образом:

$$P = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}{s_0}.$$

Согласно (26) отсюда получим

$$DNP = \frac{DN_{0,0}P^2}{s_0^2} + \frac{DN_{1,1}s_1^2 + DN_{2,2}s_2^2 + DN_{3,3}s_3^2}{s_0^2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)}.$$

Учтем, что

$$s_1 = s_0 P \cos(2\psi) \cos(2\chi); \quad s_2 = s_0 P \sin(2\psi) \cos(2\chi); \quad s_3 = s_0 P \sin(2\chi),$$

Здесь  $2\psi$  и  $2\chi$  – координаты угловой долготы и широты на сфере Пуанкаре соответственно. Они связаны с параметрами эллипса поляризации и его ориентацией относительно выбранных осей координат. Угол  $\Psi$  – угол между большой осью эллипса поляризации и осью  $X$ . Угол  $\chi$  определяется соотношением  $\tan \chi = b/a$ , где  $a$  и  $b$  – длины большой и малой оси эллипса поляризации.

Полагая  $s_0 = 1$ , для  $DNP$  найдем

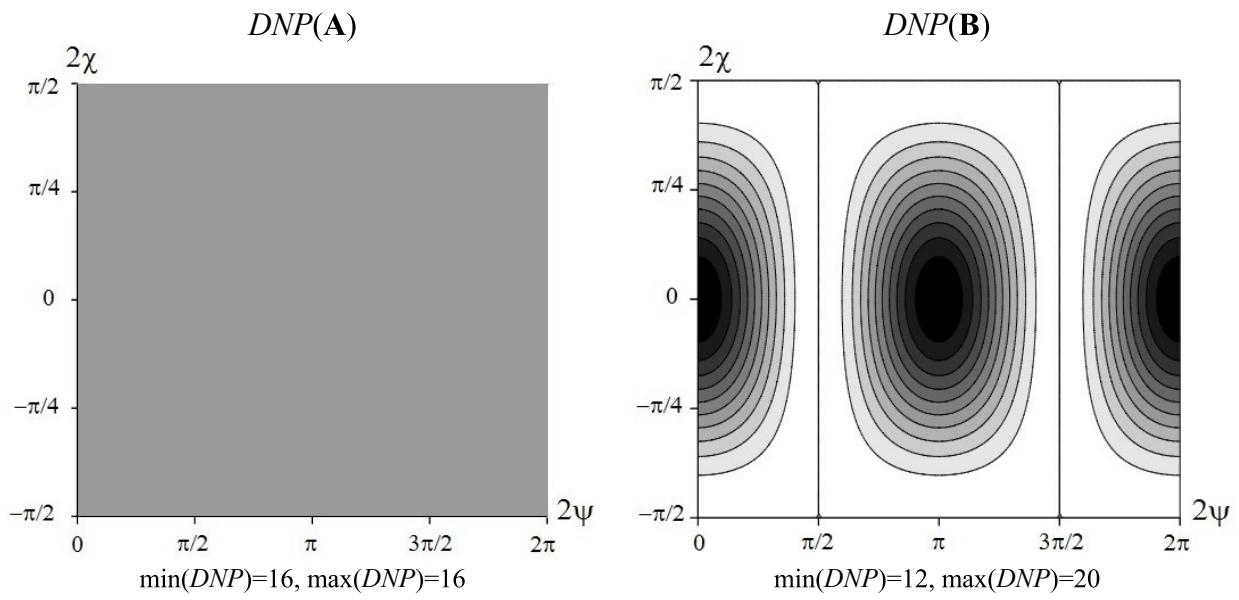
$$DNP = DN_{0,0}P^2 + DN_{1,1} \cos(2\psi) \cos(2\chi) + DN_{2,2} \sin(2\psi) \cos(2\chi) + DN_{3,3} \sin(2\chi). \quad (27)$$

Распределения  $DNP(2\psi, 2\chi)$  для матриц **A, B, C, D**, определенных формулами (26), при  $P=1$  показаны на рисунках 8. В случае **A** распределение однородное  $DNP=const=16$ . В других случаях распределения неоднородные, причем есть области, где  $DNP < 16$ . Расположение таких областей показано на рисунке 9. Аналогичные распределения для дисперсии оценок параметров

$$\chi = \frac{1}{2} a \sin \left( \frac{s_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}} \right), \quad \psi = \frac{1}{2} a \tan \left( \frac{s_2}{s_1} \right), \quad \delta = a \tan \left( \frac{s_3}{s_2} \right)$$

показаны на рисунках 10-15.

#### Дисперсия оценки степени поляризации



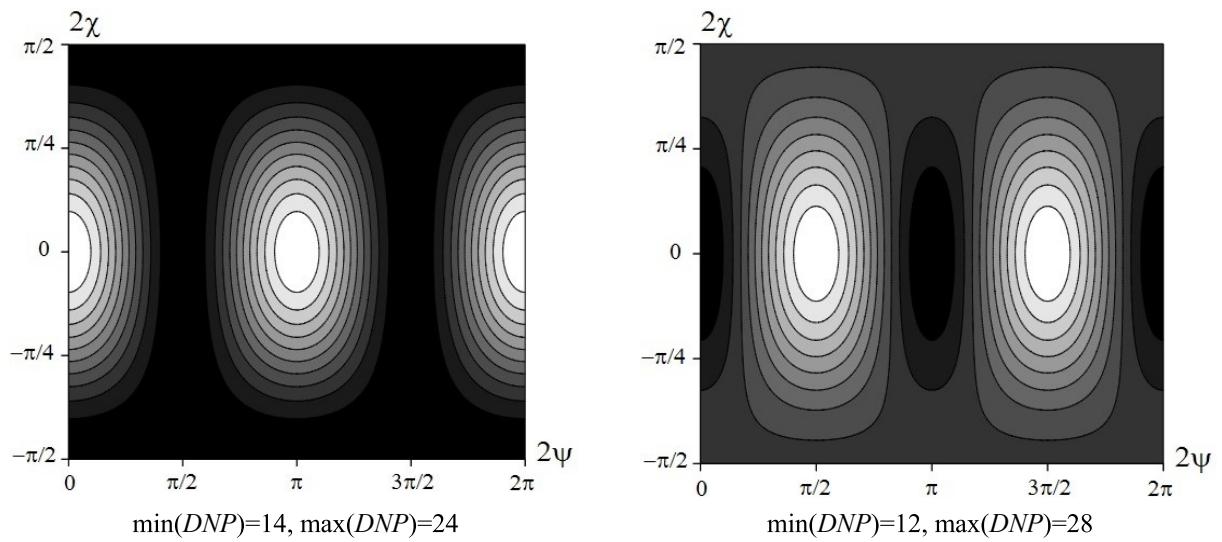


Рис. 8. Распределения дисперсии оценки степени поляризации по сфере Пуанкаре

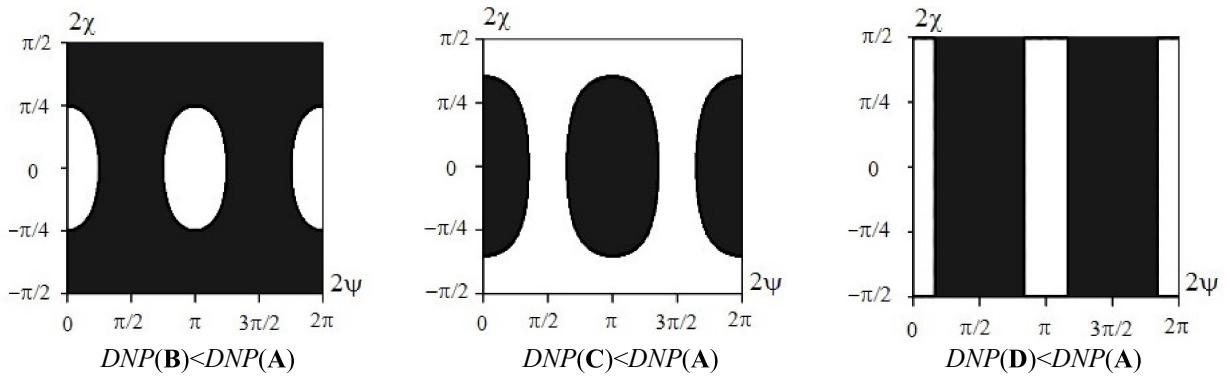
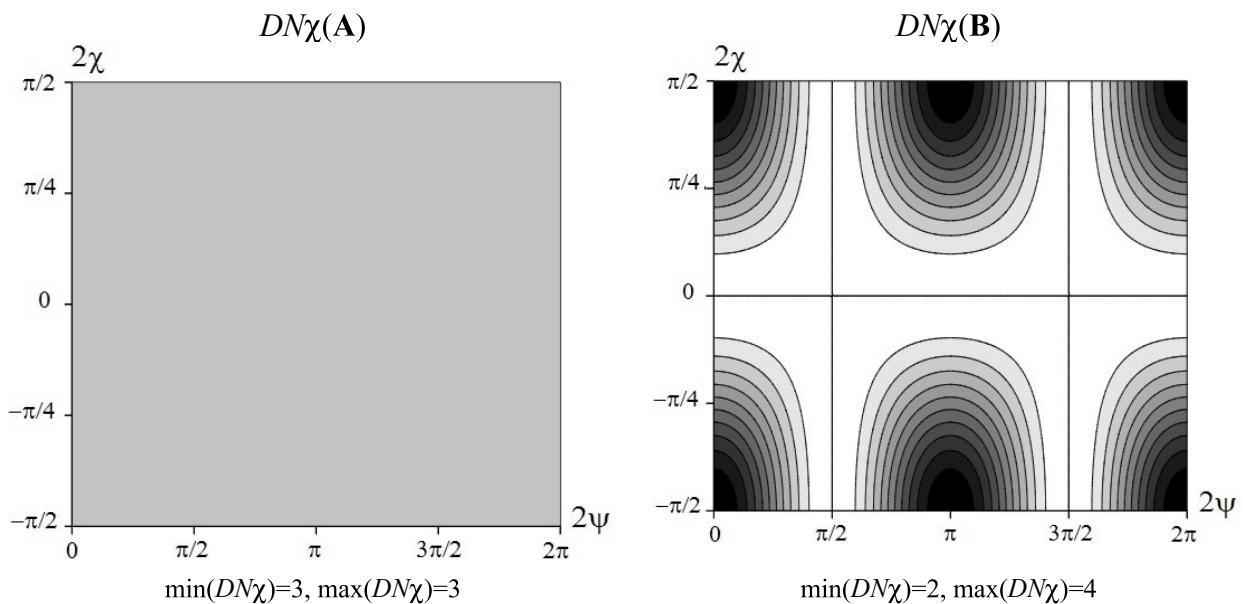


Рис. 9. Области  $DNP < DNP(\mathbf{A})$  на сфере Пуанкаре

#### Дисперсия оценки угла $\chi$



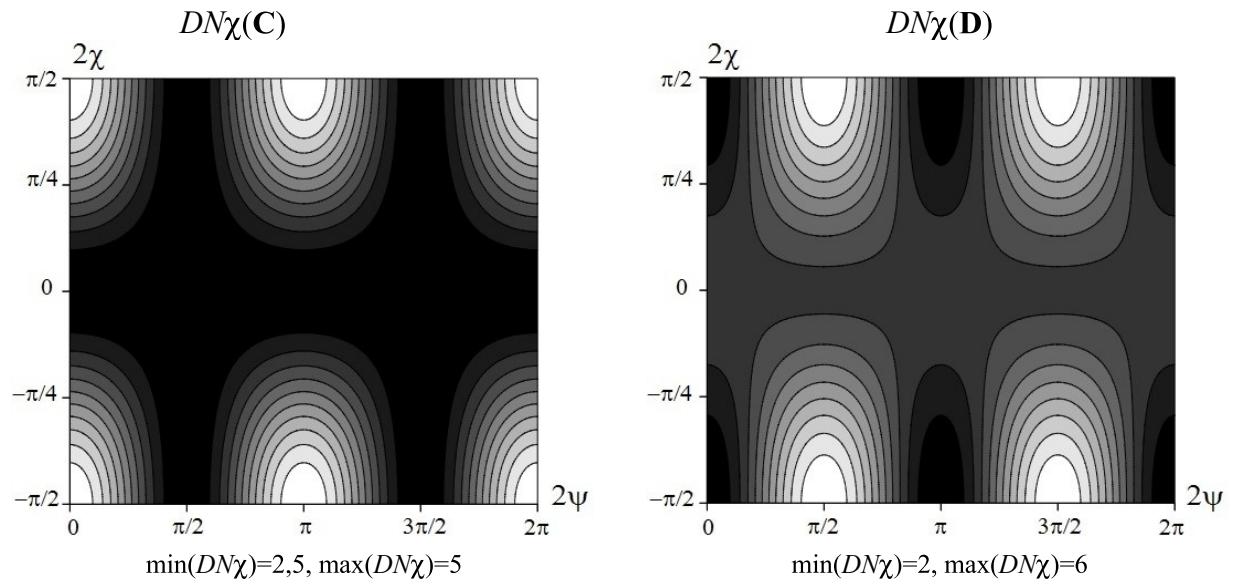


Рис. 10. Распределения дисперсии оценки  $\chi$  по сфере Пуанкаре

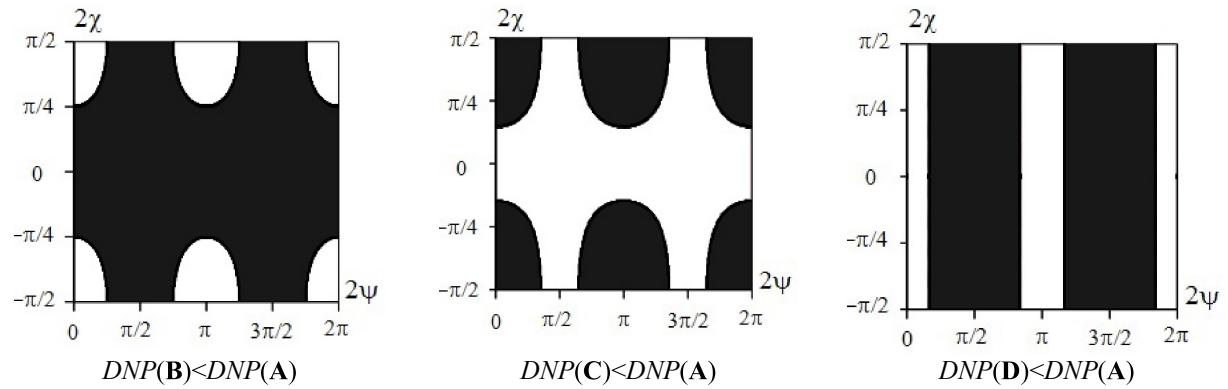
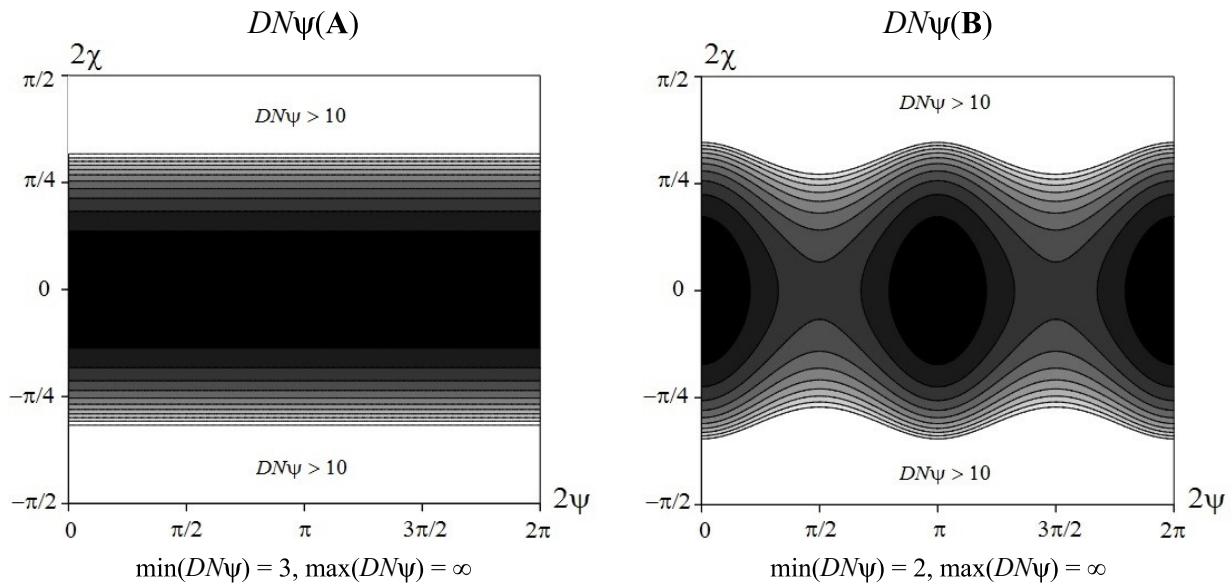


Рис. 11. Области  $DN\chi < DN\chi(\mathbf{A})$  на сфере Пуанкаре

### Дисперсия оценки угла $\psi$



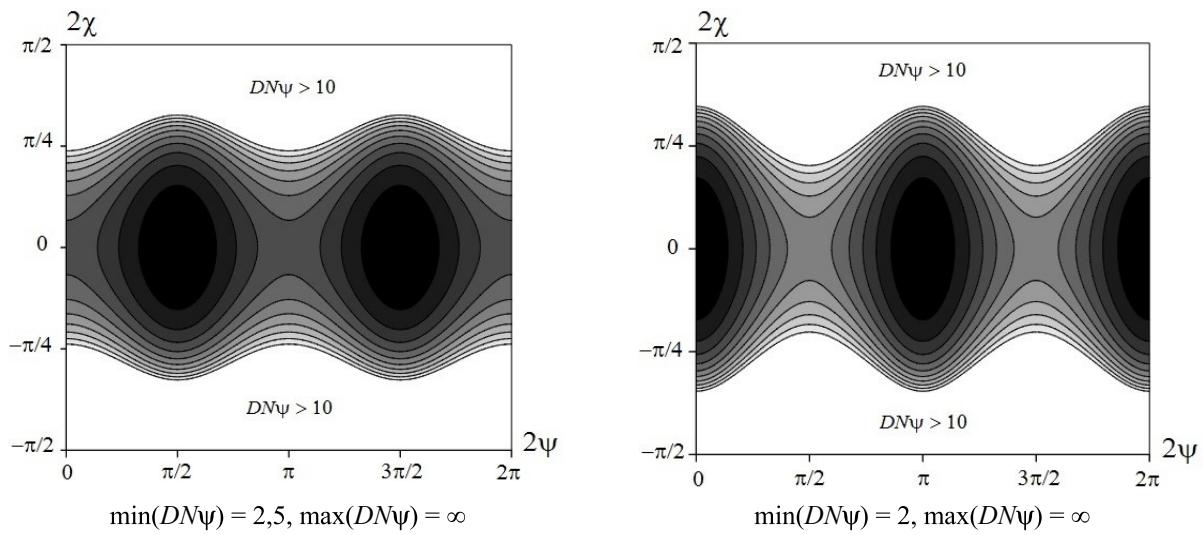


Рис. 12. Распределения дисперсии оценки  $\Psi$  по сфере Пуанкаре

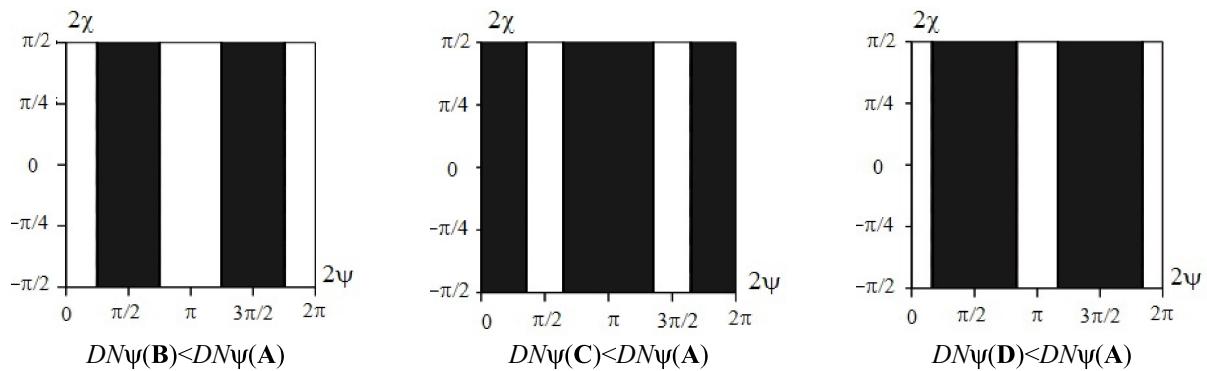
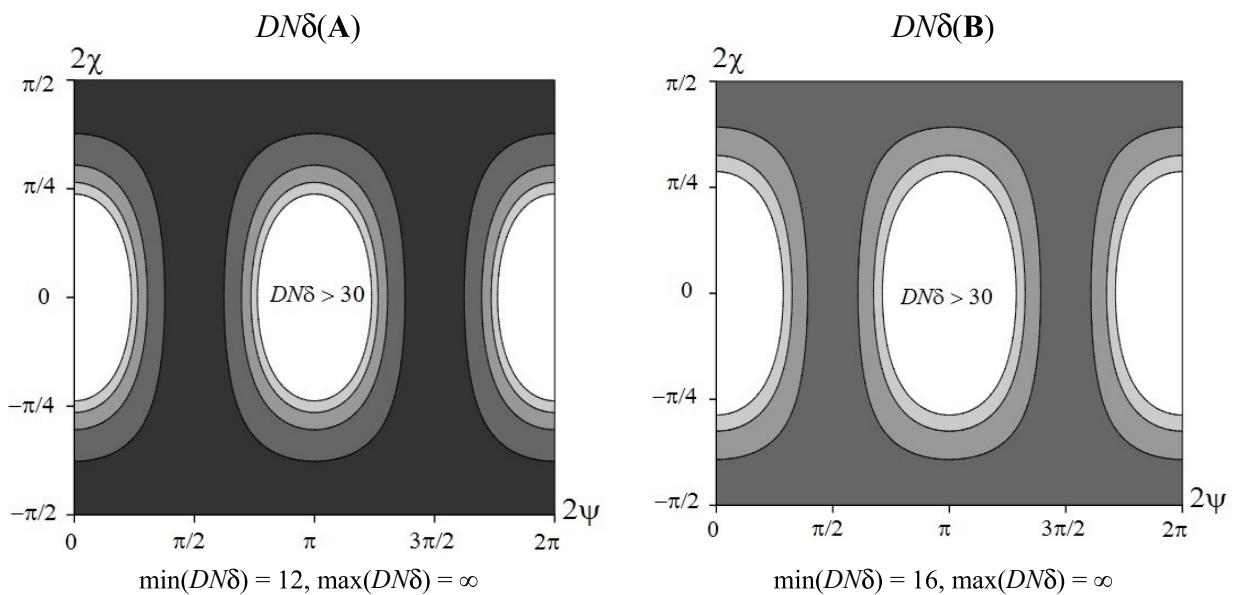


Рис. 13. Области  $DN\psi < DN\psi(\mathbf{A})$  на сфере Пуанкаре

#### Дисперсия оценки фазового сдвига $\delta$



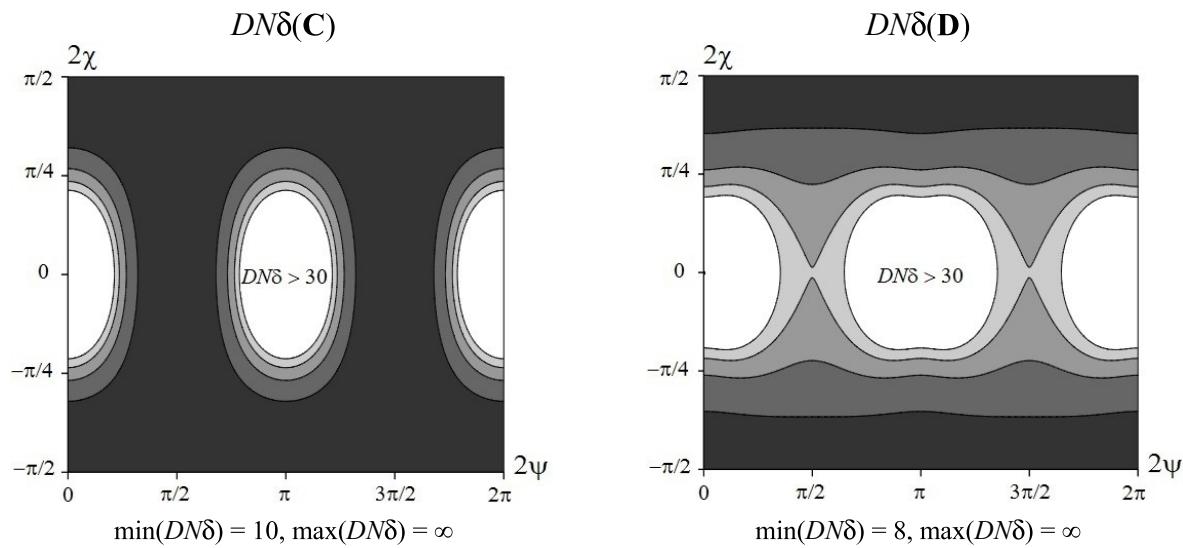


Рис. 14. Распределения дисперсии оценки фазового сдвига  $\delta$  по сфере Пуанкаре

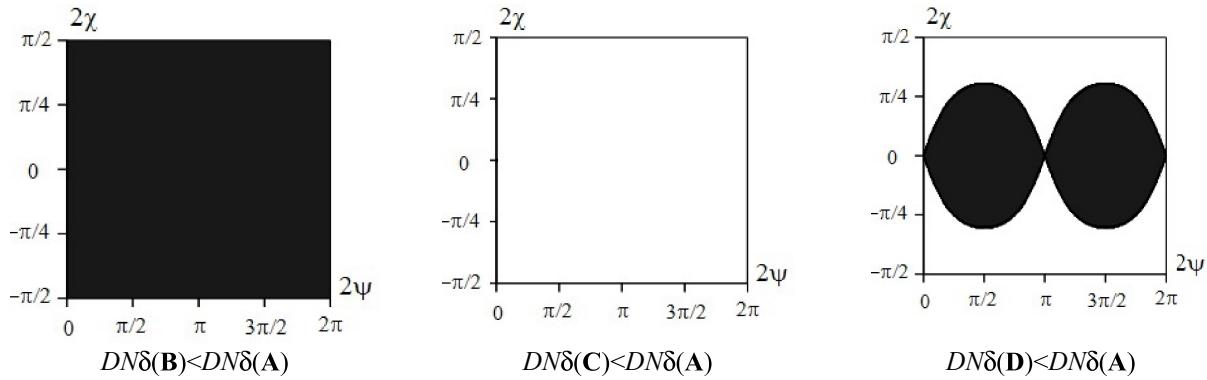


Рис. 15. Области  $DN\delta < DN\delta(\mathbf{A})$  на сфере Пуанкаре

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённое исследование показывает, каким образом можно оптимизировать измерения различных параметров поляризации методами теории информации в условиях нормального аддитивного шума.

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

**IM** – информационная матрица;

**IN** – нормированная информационная матрица;

**DN** – нормированная дисперсионная матрица оценок параметров Стокса ;

**J** – матрица когерентности;

$\theta$  – угол поворота анализатора;

$\epsilon$  – фазовый сдвиг, вносимый компенсатором;

$\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3)$  – вектор параметров Стокса;

$DNp$  – нормированная дисперсия оценки параметра  $p$ .

$\psi$  – угол наклона большой оси эллипса поляризации к оси  $X$ ;

$\chi$  – угол:  $\tan(\chi) = b/a$ ,  $b/a$  – отношение длин осей эллипса поляризации;

$\delta$  – фазовый сдвиг поляризованной части световых колебаний вдоль осей  $X$  и  $Y$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ринкевичюс Б.С.** Лазерная диагностика потоков. М.: МЭИ. 1990. 288 с.
2. **Ищенко Е.Ф., Соколов А.Л.** Поляризационный анализ. 1998. 208 с.
3. **Смирнов В.И.** Фундаментальные ограничения точности совместных измерений параметров оптических полей. ИТ. №9. 2010. С. 26-31.
4. **Смирнов В.И.** Соотношение неопределенностей и соотношение погрешностей в оптических измерениях. ИТ. №7. 2014. С. 15-19.
5. **Бард Й.** Нелинейное оценивание параметров. М.: Статистика. 1979. 349 с.
6. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики. М.: Наука, 1973

V.I. Smirnov

*Moscow Power Engineering Institute (technical university), Russia,  
111250, Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14, E-mail: smirnovvi-mpei@yandex.ru*

## METROLOGICAL ANALYSIS OF QUASI-MONOCHROMATIC LIGHT POLARIZATION MEASUREMENT ON THE BASIS OF PARAMETRIC INFORMATION THEORY

*Parametric information theory is applied for investigation of minimum variance boundary of the Stokes parameter estimates of a partially polarized quasi-monochromatic radiation in a polarimetric scheme with the analyzer and phase compensator in normal additive noise. Based on the analysis of the information density distributions in the factors of the rotation angle of the analyzer and phase shift of the compensator it was possible to justify the existing and found new measurement plans. The dispersion matrixes associated with these plans are found. The formulas are derived for obtaining effective estimates. The error limits of the various polarization parameters are calculated. The results of the analysis are confirmed by numerical simulation.*

POLARIZATION MEASUREMENTS, EFFECTIVE ESTIMATES, STOKES PARAMETERS, DEGREE OF POLARIZATION, COMPUTER SIMULATION