



*Двенадцатая международная научно-техническая конференция  
«Оптические методы исследования потоков»  
Москва, 25 — 28 июня 2013 г.*

УДК 004.932.2

А. А. Савин

*Национальный исследовательский университет Московский энергетический институт,  
Россия, 111250, Москва, Красноказарменная ул., 14, E-mail: omfi@mpei.ac.ru*

## **АЛГОРИТМ ОТСЛЕЖИВАНИЯ ЧАСТИЦ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТРАКТОВКИ МНОГОЧАСТИЧНЫХ ЗАДАЧ**

### **АННОТАЦИЯ**

В работе представлен новый алгоритм отслеживания частиц для использования в методе Particle Tracking Velocimetry. Данный алгоритм основан на математическом решении задачи поиска соответствия между элементами двух массивов данных. Приведены описание и результаты работы алгоритма.

### **ОТСЛЕЖИВАНИЕ ЧАСТИЦ, PARTICLE TRACKING VELOCIMETRY**

### **ВВЕДЕНИЕ**

Одним из распространенных методов измерения полей скоростей потоков жидкости и газа в настоящее время является лазерный метод, основанный на цифровом фотографировании траекторий частиц, визуализирующих поле скорости, с последующим компьютерным анализом их изображений (метод Particle Image Velocimetry - PIV) [1]. Одно из его главных преимуществ – высокая достоверность измерений даже при наличии шумов на изображениях, основанная на применении кросскорреляционной обработки изображений [2]. Однако итоговое разрешение данного метода всегда ограничено из-за низкочастотной фильтрации, обусловленной конечным размером окна опроса.

В последние годы мощность лазеров и качество оптических сенсоров значительно улучшились. Получаемые изображения оказываются достаточно высокого качества, чтобы было возможно надежно определять отдельные частицы и координаты их центров с высокой точностью. Применение алгоритмов отслеживания частиц позволяет оценивать смещение частиц и их положение [4]. Методы, основанные на данных алгоритмах, получили название Particle Tracking Velocimetry (PTV). И хотя концентрация частиц в данных методах меньше, чем в методе PIV, итоговое число векторов оказывается примерно одинаковым. Это связано с тем, что для надежного корреляционного анализа требуется 6-10 частиц, тогда как траекторные методы позволяют оценивать смещение каждой частицы в отдельности.

В настоящее время алгоритмы отслеживания частиц активно развиваются, примеры некоторых алгоритмов есть в [4]. В данной работе предложен новый алгоритм, основанный на математическом решении задачи поиска соответствия элементов в двух массивах данных.

## МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

### Модель PIV-изображения

Метод PIV в настоящее время получил более широкое распространение, поэтому для исследования алгоритма и сравнения результатов используется модель PIV-изображений. Она характеризуется следующими параметрами:

- формат кадра  $N_x$  на  $N_y$  пикселей;
- каждая частица представляет собой двухмерную гауссову кривую [5]; размер частицы в среднем равен пяти пикселям плюс случайное отклонение, выбранное по нормальному закону с нулевым средним и единичной дисперсией; яркость каждой частицы выбиралась по равномерному закону от 125 до 255; число частиц  $N_p$ ; координаты частиц на первом кадре выбирались также по равномерному закону от 1 до  $N_x$  по горизонтальной координате, и от 1 до  $N_y$  по вертикальной координате; на последующих кадрах координаты частиц получались путем сдвига на одну и ту же величину;
- к изображению добавлялся аддитивный нормальный шум с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ .

### Постановка задачи

Будем рассматривать двухмерный случай, хотя данный алгоритм можно легко адаптировать для отслеживания частиц в трехмерном пространстве. Будем считать, что уход частиц из кадра возможен лишь на краях изображения. Время между кадрами выбирается достаточно малым, чтобы большинство частиц осталось в кадре и их смещения соответствовали локальным скоростям. Также считаем, что проекции векторов на плоскость изображения практически совпадают с реальными значениями векторов смещения.

Таким образом, имеются массивы координат частиц  $X1$  и  $Y1$ , соответствующие первому кадру и координаты частиц  $X2$ ,  $Y2$ , соответствующие второму кадру. Координаты  $X2$  и  $Y2$  получаются путем смещения координат  $X1$  и  $Y1$  на величины  $Dx$ ,  $Dy$  во всей области кадра, за исключением краев. Из-за возможного ухода точек из кадра, число элементов в массивах  $X1$ ,  $Y1$ ,  $Dx$ ,  $Dy$ , равно  $N$ , не равно числу элементов в массивах  $X2$ ,  $Y2$ , которое равно  $M$ .

В данном случае возникает проблема одинаковой нумерации частиц на двух кадрах. Если бы мы могли пронумеровать частицы так, чтобы первая частица на первом кадре соответствовала первой частице на втором кадре, то проведя вектор между данными частицами, мы бы решили задачу. Однако это невозможно. Для того чтобы данную проблему обойти, воспользуемся одним из инвариантов относительно нумерации – суммой слагаемых. Представим оба кадра в виде:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \sum_{n=1}^N \delta(x - X1_n) \delta(y - Y1_n), \\ f_2(x, y) &= \sum_{m=1}^M \delta(x - X2_m) \delta(y - Y2_m). \end{aligned} \tag{1}$$

В (1)  $\delta$ -функции выбраны для того, чтобы не было перекрытия между частицами. Но так как в дальнейшем задачу предполагается решать на компьютере, то лучше с помощью преобразования Фурье уйти от неудобных для программирования  $\delta$ -функций:

$$\begin{aligned}
F_1(p, q) &= \sum_{n=1}^N e^{i \cdot p \cdot X1_n + i \cdot q \cdot Y1_n}, \\
F_2(p, q) &= \sum_{m=1}^M e^{i \cdot p \cdot X2_m + i \cdot q \cdot Y2_m}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Как говорилось выше, уход частиц из кадра возможен лишь на краях. Чтобы эти частицы влияли как можно меньше, можно ввести в (2) весовые коэффициенты, которые по краям кадра принимают малые значения, минимизируя вклад данных частиц в общую сумму:

$$\begin{aligned}
F_1(p, q) &= \sum_{n=1}^N \alpha_n e^{i \cdot p \cdot X1_n + i \cdot q \cdot Y1_n}, \\
F_2(p, q) &= \sum_{m=1}^M \beta_m e^{i \cdot p \cdot X2_m + i \cdot q \cdot Y2_m}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Из условия задачи второй кадр можно также представить в следующем виде:

$$\boxed{F_2(p, q)} = \sum_{n=1}^N \alpha_n e^{i \cdot p \cdot (X1_n + Dx_n) + i \cdot q \cdot (Y1_n + Dy_n)}. \tag{4}$$

Как уже было сказано, время между кадрами подбирают таким образом, чтобы большинство частиц осталось в кадре. Поэтому  $\boxed{F_2(p, q)} \approx F_2(p, q)$ . Определим расстояние между кадрами следующим образом ( $D$  – область кадра):

$$F(Dx, Dy) = \iint_D \left| \sum_{n=1}^N \alpha_n e^{i \cdot p \cdot (X1_n + Dx_n) + i \cdot q \cdot (Y1_n + Dy_n)} - \sum_{m=1}^M \beta_m e^{i \cdot p \cdot X2_m + i \cdot q \cdot Y2_m} \right|^2 dpdq. \tag{5}$$

Таким образом, необходимо определить такие значения смещений  $Dx$  и  $Dy$ , чтобы функция (5) была минимальной. Задача свелась к нахождению экстремума функции нескольких переменных. Для ее решения можно использовать уже существующие и хорошо развитые численные методы.

Большинство численных алгоритмов работают лучше и быстрее, если точка начального приближения находится как можно более близко к истинному значению экстремума. Предлагается в качестве первого приближения интерполировать в координаты частиц ( $X1$ ,  $Y1$ ) векторное поле, полученное в результате предварительного PIV-анализа исходных изображений.

В заключении можно привести некоторые результаты. В том случае, когда выход частиц из кадра исключен, данный алгоритм определяет вектора смещения с относительной погрешностью, равной сотым долям процента, которая определяется в основном погрешностью вычислений. Если же частицы выходят из кадра, погрешность возрастает до единиц процентов.

Время вычисления при большом числе точек на персональном компьютере достаточно велико. Чтобы получить хоть какие-то результаты для реального числа точек, все пространство разбивалось на квадратные непересекающиеся подобласти, причем на втором кадре подобласть увеличивалась с целью предотвращения потери точек, и метод применялся к каждой подобласти независимо. Это иллюстрируется на рисунке 1. Красным цветом отмечено положение частиц на первом кадре (круглые маркеры), черным цветом – на втором кадре (маркеры-ромбы). Примеры результатов обработки картин смещения частиц при малой концентрации показаны на рисунке 2.

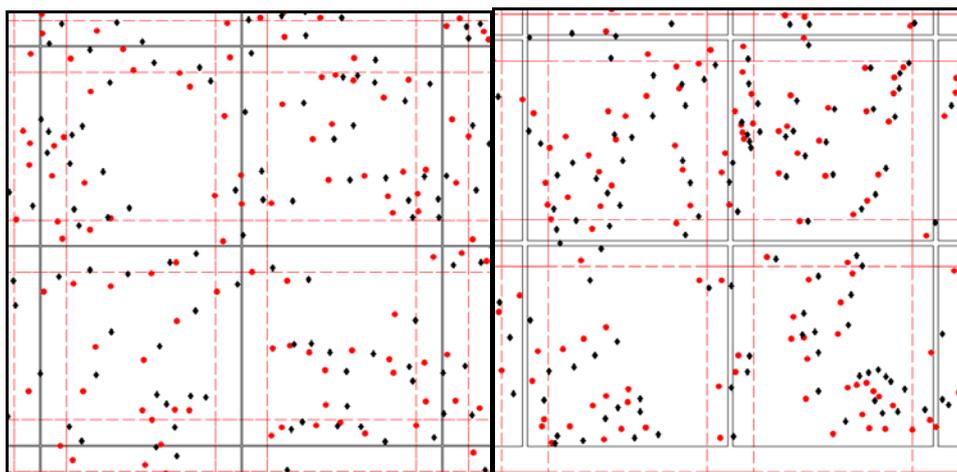


Рис. 1. Разбиение пространства изображения на подобласти, сплошная черная линия – первый кадр, пунктирная красная – второй

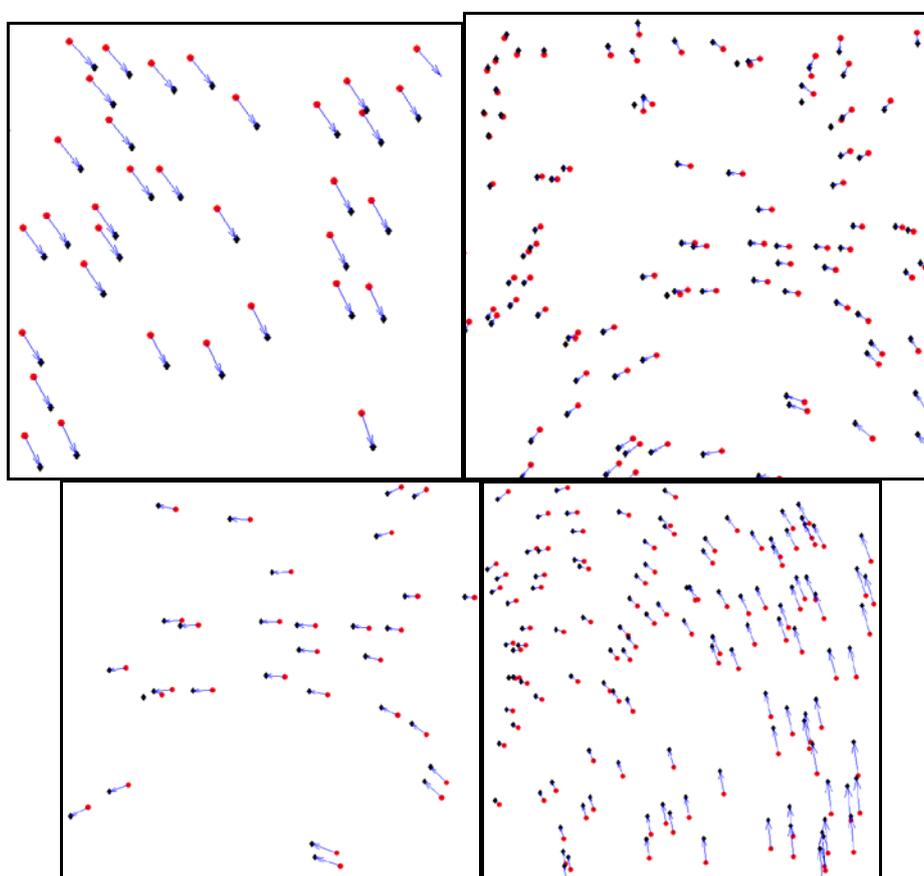


Рис. 2. Векторное поле смещений частиц первого кадра при малой концентрации частиц

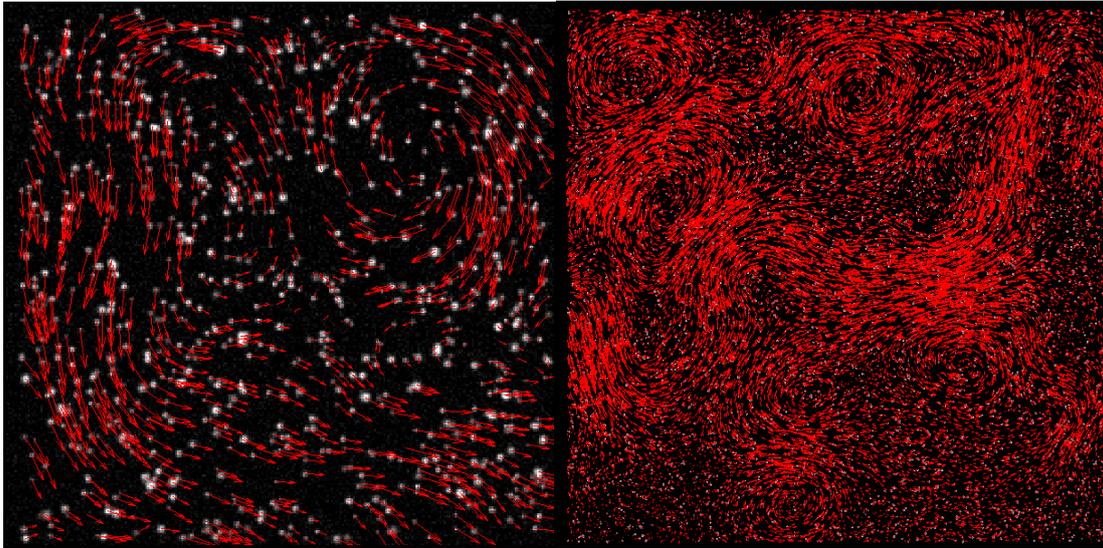


Рис. 3. Векторное поле смещений частиц первого кадра при большой концентрации частиц

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен новый алгоритм отслеживания частиц для использования в методе РТВ. Метод основан на использовании инварианта относительно нумерации частиц – суммы – и введения метрики. Это позволяет свести задачу к хорошо изученной задаче поиска экстремума функции нескольких переменных.

Для минимизации влияния краевых частиц, число которых от кадра к кадру может меняться, предлагается использовать весовые коэффициенты, величина которых спадает к краю кадра. На следующем этапе планируется провести исследования влияния размера окна опроса на итоговую погрешность. Понятно, что с увеличением размера данного окна будет возрастать точность, так как для анализа будет использоваться большее количество данных. Однако это также приведет к увеличению времени вычисления. Следовательно, можно найти некоторый компромисс между точностью и временем вычисления. Также необходимо произвести сравнительное исследование данного метода с некоторыми из наиболее распространенных существующих методов. Эта задача усложняется тем, что какие-то общепринятые и хорошо описанные методы автору неизвестны.

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

- $N_x$  – число пикселей изображения по горизонтали;
- $N_y$  – число пикселей изображения по вертикали;
- $N_p$  – число точек на изображении;
- $\sigma$  – среднеквадратическое отклонение нормального шума;
- $(X1, Y1)$  – координаты частиц на первом кадре;
- $(X2, Y2)$  – координаты частиц на втором кадре;
- $N$  – число частиц на первом кадре;
- $M$  – число частиц на втором кадре;
- $(Dx, Dy)$  – искомые смещения частиц по оси абсцисс и ординат соответственно;
- $f1, F1$  – функция, представляющая первый кадр и ее фурье-образ соответственно;
- $f2, F2$  – функция, представляющая второй кадр и ее фурье-образ соответственно;
- $\alpha, \beta$  – весовые коэффициенты для первого и второго кадра соответственно;
- $F$  – разностная функция для поиска минимума;
- $D$  – область кадра для интегрирования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ринкевичюс Б. С.** Лазерная диагностика потоков / Под ред. В. А. Фабриканта. М.: Изд-во МЭИ, 1990.
2. **Raffe M, Willert C. E., Wereley S. T., Kompenhans J.** Particle Image Velocimetry: A Practical Guide, Second Edition / Springer Berlin Heidelberg New York, 2007.
3. **Kähler, C.J., Scharnowski, S., Cierpka, C.** On the resolution limit of digital particle image velocimetry // Experiments in Fluids – 2012 – Vol. 52 – pp. 1629-1639.
4. **Cierpka C, Kähler C.J.** Cross-correlation or tracking - comparison and discussion // 16th Int Symp on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics Lisbon, Portugal, 09-12 July, 2012.
5. **Marxen M., Sullivan P. E., Loewen M. R. Jähne.** Comparison of Gaussian particle center estimators and the achievable measurement density for particle tracking velocimetry // Experiments in Fluids – 2000 – Vol. 29 – pp. 145-153.

A. A. Savin

*National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, Russia,  
111250, Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14, E-mail: omfi@mpei.ac.ru*

### **PARTICLE PAIRING ALGORITHM BASED ON MATHEMATICAL TREATMENT OF MANY PARTICLES TASKS**

This paper presents a new algorithm for particle pairing for use in Particle Tracking Velocimetry. This algorithm based on the mathematical solution of the problem of finding correspondences between elements of the two datasets. Description and results of the algorithm are given.

PARTICLE PAIRING, PARTICLE TRACKING VELOCIMETRY