Одиннадцатая Международная научно-техническая конференция
«Оптические методы исследования потоков»
Москва, 27 — 30 июня 2011 г.

УДК 517.443:535.36

Г.С. Ханян

Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, Россия
111116, Москва, Авиамоторная ул., 2, E-mail: dep007@rtc.ciam.ru

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МГНОВЕННОЙ ЧАСТОТЫ ЛЧМ-СИГНАЛА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФАЗОВЫМ МЕТОДОМ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Предложен метод определения мгновенной частоты ЛЧМ-сигнала – частотно-модулированного гармонического колебания с линейно изменяющейся во времени частотой. Метод основан на использовании фазовых соотношений, получаемых дискретным преобразованием Фурье, выполняемым над перекрывающимися фрагментами сигнала ограниченной длительности. Проводятся численные эксперименты по математическому моделированию и спектральному анализу ЛЧМ-сигнала для подтверждения метода и определения границ его применимости.

ЛЧМ-СИГНАЛ, ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ, СПЕКТР РАЗНОСТИ ФАЗ, ОЦЕНКА ЧАСТОТЫ, ПОГРЕШНОСТИ

ВВЕДЕНИЕ

Гармоническое колебание бесконечной длительности, будучи «эталоном» в обширном семействе сигналов, не может быть носителем содержательной информации без модуляции – медленного изменения одного из его параметров – амплитуды, частоты или фазы. Одним из интересных и актуальных типов модуляции является линейная частотная модуляция, исследованию которой дифференциально-фазовым методом [1], апробированным на ЛДА-сигнале [2], посвящена настоящая работа.

Измерение скорости изменения частоты ЛЧМ-сигнала применяется для компенсации эффекта Доплера в мобильной связи, в качестве способа формирования и обработки зондирующего импульса в радиолокации [3], для оценки лагранжева ускорения частицы в турбулентном потоке [4], в задачах диагностики технического состояния авиационных двигателей и энергетических установок, в других приложениях оптики, электродинамики, аэрогидромеханики, использующих теорию и практику цифровой обработки сигналов.

Кроме того, фрагменты ЛЧМ-сигналов конечной длительности (т.н. чирпы – *от англ.* chirp) обладают самостоятельной математической ценностью. Подвергнутые амплитудной модуляции, масштабированию и сдвигу, они служат базисными функциями чирплет-преобразования – естественного обобщения вейвлет-преобразования. В то же время для детектирования ЛЧМ-сигнала могут использоваться отличающиеся от «материнского» типы двумерных преобразований, например, преобразование Радона [5].

Примечательным для теории ДПФ фактом является то, что вычислительная процедура предлагаемой модификации дифференциально-фазового метода использовалась и в работе [2] – для оценки глубины амплитудной модуляции ЛДА-сигнала. Отличие состоит в том, что построенные градуировочные характеристики ЛДА- и ЛЧМ-сигналов интерполируются различными функциями (кубической параболой и прямой линией, соответственно).

ЛИНЕЙНО ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННЫЙ СИГНАЛ

Рассматривается аналоговый частотно-модулированный гармонический сигнал

$$s(t) = a_0 \cos\left(2\pi f(t)t + \varphi_0\right); \quad -T \le t < T \tag{1}$$

с постоянными амплитудой a_0, начальной фазой φ_0 и линейно изменяющейся во времени мгновенной частотой

$$f(t) = f_0 + \alpha F t / T; \quad |\alpha| F < f_0 < F/2 - |\alpha| F. \tag{2}$$

Сигнал наблюдается в течение времени $2T$ секунд в полосе частот с предельно заданной шириной $F/2$ Гц. Безразмерный параметр α определяет глубину частотной модуляции, диапазон возможных значений несущей частоты f_0, и определяет общепринятые в литературе [6 – 7] другие параметры, характеризующие ЛЧМ-сигнал. К ним относятся:

- скорость изменения частоты $\gamma = \alpha F/T$ (нарастания при $\alpha > 0$, торможения – при $\alpha < 0$);
- девиация частоты $\delta = \alpha F$, показывающая максимальное отклонение частоты f в положительную или отрицательную сторону от несущей частоты f_0, так что за время наблюдения мгновенная частота изменяется в пределах $f_0 \pm \delta$;
- база сигнала $b = 2\delta \cdot 2T$, представляющая собой произведение полной (удвоенной) девиации частоты на длительность сигнала (ЛЧМ-импульса).

Последний параметр рассматривается в литературе как основной параметр ЛЧМ-модуляции. Так, принято считать ЛЧМ-сигнал «простым», если $b \approx 1$ и «сложным», если $b >> 1$ [6]. В настоящей работе характерное значение базы составляет $b \approx 5$, что соответствует значению параметра $\alpha \approx 0{,}005$ при выбранном «стандартном» значении произведения $TF = 512$. Примечательно, что параметр α не зависит от этого произведения и является обезразмеренной по нему, а потому, более «универсальной» базой сигнала, теоретически возможные значения которой находятся в диапазоне $-1/4 < \alpha < +1/4$ (границы которого устанавливаются из решения относительно α неравенства (2), выражающего, в свою очередь, тот факт, что $0 < f(t) < F/2$). Отметим при этом, что «центральное», нулевое значение α соответствует чистому гармоническому сигналу.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЛЧМ-СИГНАЛА

Методика дискретного спектрального фурье-анализа сигнала (1) заключается в следующем. Аналоговая реализация $s(t)$ дискретизируется с частотой F, и полученная дискретная последовательность отсчетов сигнала – цифровая реализация длиной $2N$=$2TF$ разбивается на четыре последовательных участка длиной $N/2$ и длительностью $T/2$ каждый. Из этих участков составляются две пары перекрывающихся N-точечных цифровых реализаций, имеющие общее число $N/2$ отсчетов:

$$s_{l,j}[n] = s(n/F + (2j + l - 3)T/4); \quad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ \mathrm{N} - 1; \quad j = 0,\ 1; \quad l = \pm 1. \tag{3}$$

Здесь числа n, l и j нумеруют, соответственно, отсчет реализации, пару реализаций и перекрывающийся участок в паре.

Взаимный спектральный анализ над выбранной l-й парой реализаций с участками $j = 0$ и $j = 1$ проводится с усечением каждой реализации пары на k отсчетов на k-м шаге алгоритма, выполняющего следующую запрограммированную последовательность действий:

- дискретное преобразование Фурье усеченных до N_k отсчетов реализаций пары:

$$S_{l,j,k}[m]=\frac{1}{N_k}\sum_{n=0}^{N_k-1} s_{l,j}[n]e^{-i2\pi mn/N_k}\;;\quad m=0,\,1,\,\ldots,N_k-1;\quad N_k=N-k;\quad k=0,1,2,\,\ldots \qquad ;(4)$$

- вычисление взаимного спектра амплитуд и спектра разности фаз реализаций:

$$A_{l,k}[m]=2\sqrt{|\overset{*}{S}_{l,0,k}[m]S_{l,1,k}[m]|};\quad \Phi_{l,k}[m]=\arg S_{l,1,k}[m]-\arg S_{l,0,k}[m];\quad m=1,\,2,\,\ldots,\,M_k \qquad ,(5)$$

где $M_k = [N_k/2]$ – дискретная длина спектра (здесь и далее квадратные скобки означают целую часть заключенного в них выражения);

- поиск максимума во взаимном спектре амплитуд:

$$A_{l,k}[m_k]=\max_{m=1,\ldots m_k,\ldots,M_k} A_{l,k}[m]; \qquad (6)$$

- использование фазы на адресе m_k максимума (6) для построения характеристики

$$\mu_k(N_k)=\frac{\Phi_{l,k}[m_k]}{\pi}\,\frac{N_0}{[N_0^2/N_k]}, \qquad (7)$$

служащей в дальнейшем для оценки параметра α.

С методологической точки зрения обе пары $l = \pm 1$ равноценны, и для определенности в настоящей работе рассматривается правая, более поздняя во времени, пара с индексом $l = 1$.

Реализации процесса (1) моделируются и анализируются программой цифровой обработки сигналов *quatrix.exe*® [8], в которую внедрены процедуры, осуществляющие вычисления по формулам (3) – (7).

На рис. 1 и рис. 2 приведены результаты проводимого спектрального анализа. В окнах ‘*Signal*_0’ (внизу экрана ПК) и ‘*Signal*_1’ (в середине экрана) нарисованы осциллограммы (серым цветом) перекрывающихся участков сигнала с индексами $j = 0$ и $j = 1$ соответственно, вместе с автоспектрами амплитуд (черным цветом) этих цифровых реализаций:

$$A_{1,j,k}[m]=2\,|\,S_{1,j,k}[m]\,|;\quad m=1,\,2,\,\ldots,\,M_k;\quad j=0,\,1. \qquad (8)$$

В верхнем окне экрана ПК нарисованы взаимные спектры, вычисленные по формулам (5).

Рис. 1 относится к моделированию гармонического сигнала со скоростью увеличения частоты γ = 7,68 Гц/сек, рис. 2 – к моделированию чистого гармонического сигнала (γ=0). В остальном параметры процессов и условия их анализа на обоих рисунках одинаковы: несущая частота сигнала f_0 = 25 Гц, фаза φ_0 = 30°, амплитуда a_0 = 100, исходная длина цифровой реализации N = 512 (при длительности T = 1 сек), число усеченных отсчетов k = 7.

Очевидно принципиальное отличие структуры спектров амплитуд и фаз ЛЧМ-сигнала от структуры соответствующих спектров чистого гармонического сигнала. Пики спектров амплитуд ЛЧМ-сигнала уширены, и вся информативность спектра разности фаз сосредоточена в частотной полосе уширения пика взаимного спектра амплитуд, в то время как спектр разности фаз участков чистого гармонического сигнала имеет альтернирующий между значениями $\pm\pi$ характер, причем, равномерно во всем диапазоне частот.

Отмеченное отличие в поведении спектров фаз и используется в излагаемом ниже методе оценки параметра α.

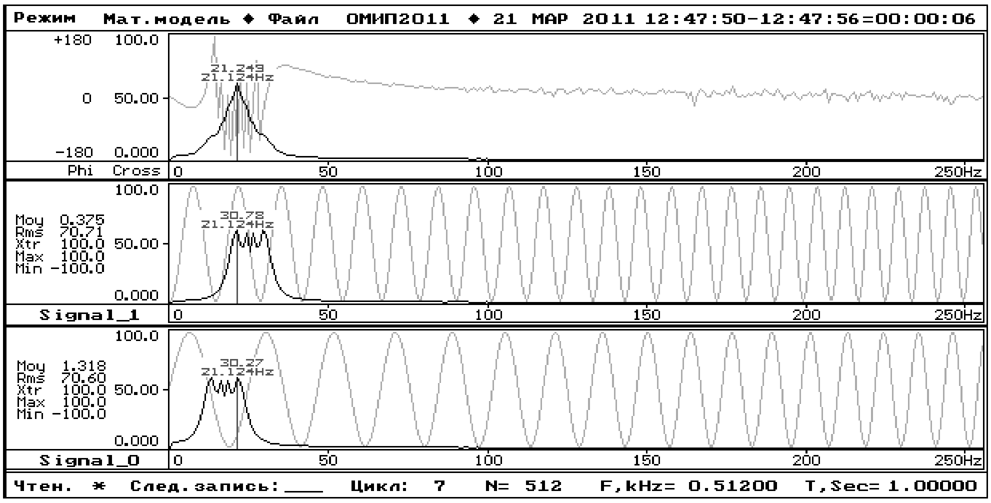

Рис. 1. Спектральный анализ линейно частотно-модулированного сигнала

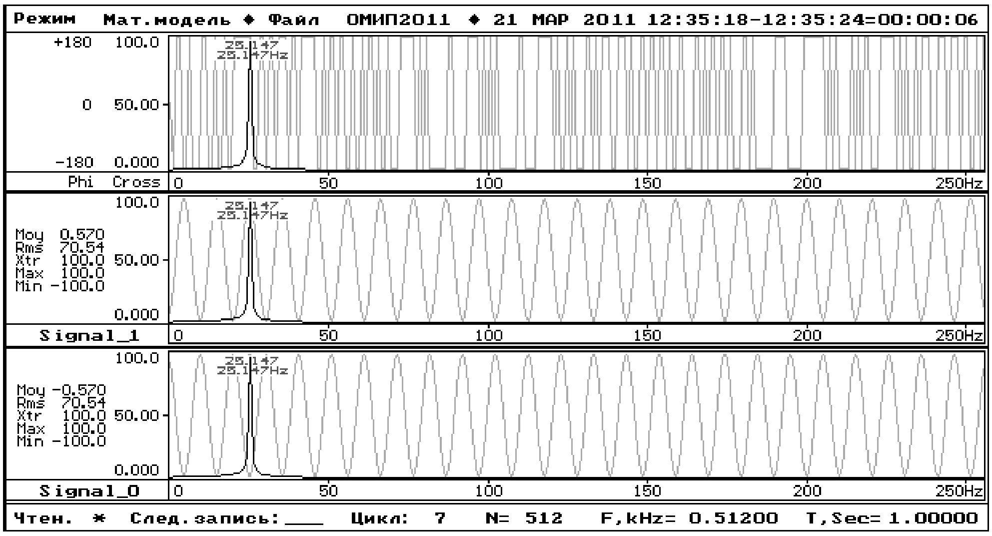

Рис. 2. Спектральный анализ чистого гармонического сигнала

ОСНОВНАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА МЕТОДА

Вычислительная процедура метода показана на рис. 3, на котором изображен график характеристики (7), построенный средствами табличного процессора *MS Excel*.

В формуле (7) используется фаза, приведенная по модулю 2π, поэтому правая часть этой формулы изменяется в пределах $\pm$ 1. Конечный результат приводится к границам $\pm$ 1/2, и в результате график параметра μ_k принимает пилообразную форму

$$\mu_k = -\beta N_k + c \qquad (9)$$

с достаточно близкими для обоснования состоятельности метода значениями параметров чередующихся линейных участков – коэффициентов наклона β и констант смещения c. Последний параметр не играет никакой роли в излагаемом методе, в то время как именно параметр β представляет собой косвенную оценку параметра α.

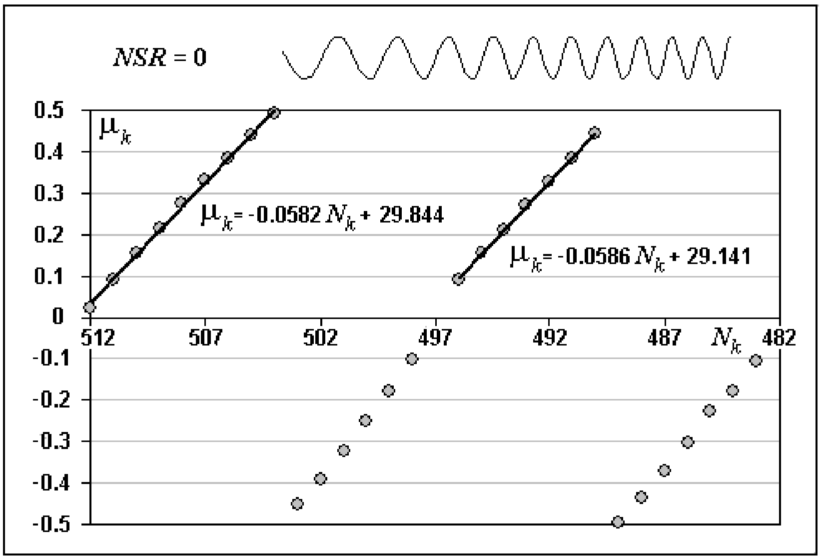

Рис. 3. Поведение характеристики $\mu_k\,(N_k)$ чистого ЛЧМ-сигнала

Для оценки устойчивости поведения характеристики $\mu_k\,(N_k)$ по отношению к искажающим факторам, в качестве последнего использовался шум, генерируемый датчиком псевдослучайных чисел *random*. Равномерно распределенный шум подмешивался к цифровым реализациям (3) сигнала (1) в отношении 1:1 по размаху амплитуды. Характеристика $\mu_k\,(N_k)$ зашумленного таким способом исходного (изображенного в верхней части рис. 3) ЛЧМ-сигнала показана на рис. 4.

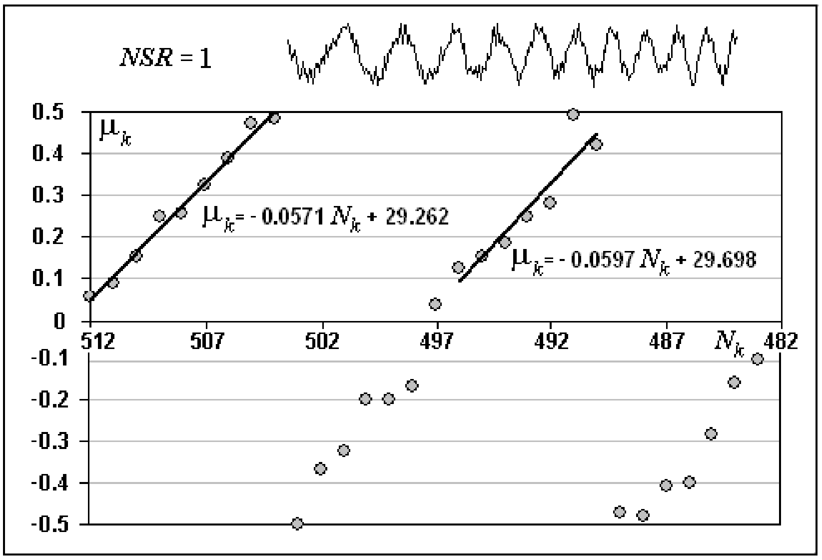

Рис. 4. Поведение характеристики $\mu_k\,(N_k)$ зашумленного ЛЧМ-сигнала

Из сравнения рис. 3 и рис. 4 видно, что довольно заметное зашумление ЛЧМ-сигнала несильно искажает поведение характеристики $\mu_k\,(N_k)$.

Для определения связи между параметрами α и β проводился численный эксперимент, в котором процесс (1) моделировался с различными значениями параметра α (от 0 до 0,02 с шагом 0,0005) при неизменной безразмерной несущей частоте $f_0T = 32{,}25$ и исходной длине реализации $N = 512$ отсчетов. Для каждого заданного значения α строилась характеристика $\mu_k(N_k)$, и на подходящем линейном участке строилась линия регрессии для определения параметра β. Построенный таким образом график зависимости $\beta(\alpha)$ представлен на рис. 5.

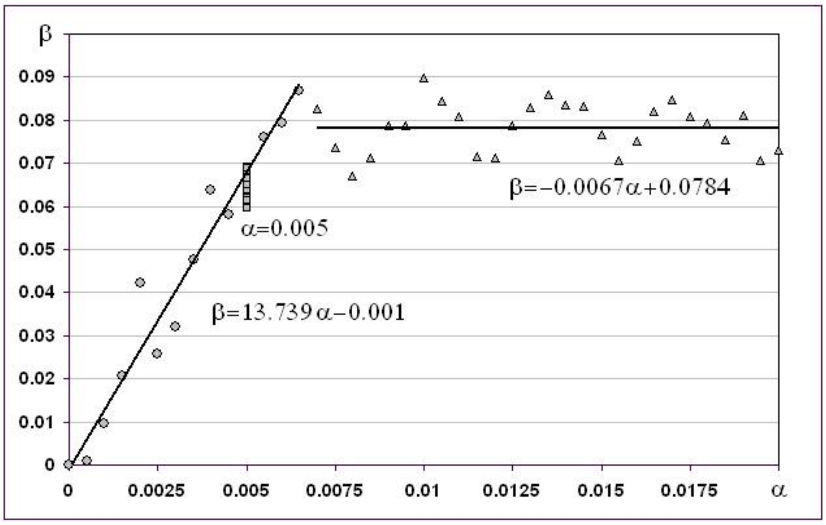

Рис. 5. Результаты численного эксперимента по построению графика зависимости β(α)

ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ И ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА

Из рис. 5 видно, что существует пороговое значение $\alpha^* \approx 0{,}007$, разделяющее данные измерений параметра β на два кластера, нанесенные «кружочками» и «треугольниками» – с наклонной и горизонтальной линиями регрессии, соответственно.

По обе стороны от горизонтальной линии поведение β носит волнообразный характер, не находящий объяснения ни в рамках традиционно излагаемой в литературе теории дискретного спектрального анализа, ни дифференциально-фазового метода определения частоты [1], применяемого в настоящей работе для оценки параметра α.

Это обстоятельство вынуждает сузить границы практической применимости дифференциально-фазового метода, а именно: считать $|\alpha| < \alpha^*$ «рабочим» диапазоном изменения параметра α (вместо теоретически установленного выше диапазона $|\alpha| < 0{,}25$), ограничиваясь рассмотрением лишь наклонной линии регрессии, по обе стороны от которой с приемлемым разбросом ложатся экспериментально определенные значения коэффициента наклона β. Соответствующая порогу α^* максимальная полная девиация частоты ЛЧМ-сигнала составляет ≈ 2,8 % от частоты Найквиста $F/2$.

Для оценки погрешности измерения параметра β был проведен численный эксперимент, в котором сигнал (1) моделировался при неизменном значении α=0,005, но с вариацией безразмерной частоты сигнала f_0T в пределах одного бина – от 32 до 33 с шагом по дробной части частоты $\{f_0T\} = f_0T - [f_0T]$, равным 0,1. Именно дробная часть безразмерной частоты определяет размеры известного в литературе по спектральному анализу эффекта просачивания амплитуды [1, 7], выражающегося в уширении пика гармонической составляющей спектра амплитуд, сопровождаемом занижением истинного значения амплитуды на величину от 0 (при целых значениях f_0T) до 36 % (при полуцелых).

Результаты этого численного эксперимента приведены на рис. 6 и нанесены «квадратиками» на вертикальную линию с абсциссой заданного значения α на рис. 5.

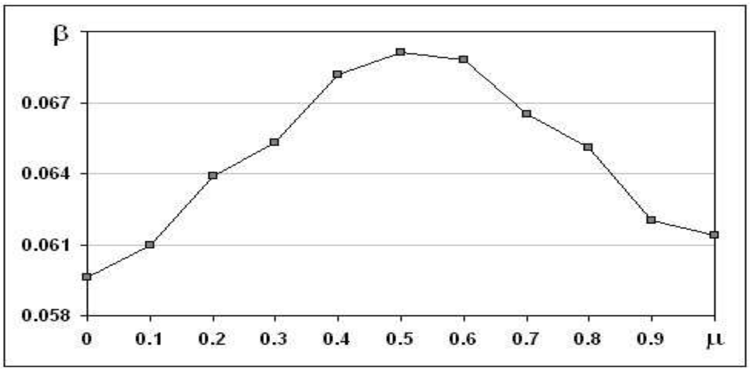

Рис. 6. Результаты численного эксперимента по определению погрешности измерения β

Видно, что данные по β располагаются между 0,06 и 0,07, оказываясь заниженными при целых f_0T, и завышенными – при полуцелых. Это позволяет утверждать, что абсолютная погрешность измерения β примерно равна ± 0,005, что соответствует относительной погрешности $\varepsilon = \pm 0{,}005 / (13{,}739 \times 0{,}005 - 0{,}001) = \pm 7{,}386\ \%$ определения β при данном α. На основании этого, с некоторым запасом, можно ограничить относительную погрешность определения β на всем наклонном участке величиной 10%.

ГРАДУИРОВОЧНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРА α

Наличие на рис. 5 наклонного линейного участка позволяет путем обращения этой функциональной зависимости построить линейную градуировочную зависимость для оценки параметра α по результатам дискретного спектрального анализа ЛЧМ-сигнала. Такая зависимость представлена на рис. 7 и ее можно описать формулой

$$\alpha = p\beta + d, \tag{10}$$

в которой величиной смещения d можно пренебречь в силу ее малости по сравнению с коэффициентом p.

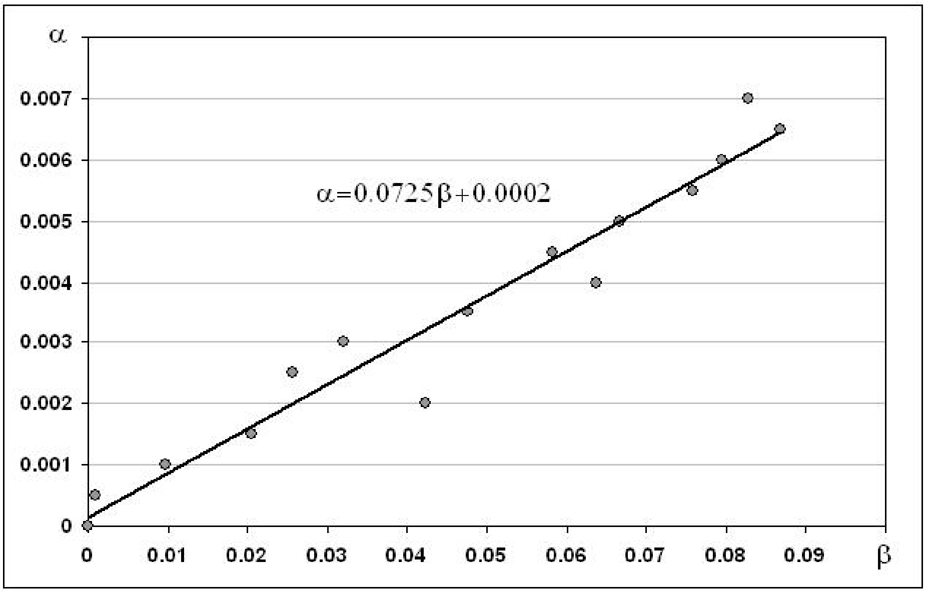

Рис. 7. Градуировочная зависимость α(β), снятая на фиксированной центральной частоте f_0T

Зависимость (10) построена, как отмечено выше, для фиксированного значения безразмерной частоты $f_0T = 32{,}25$. Для окончательной оценки параметра α требуется определить зависимость самого параметра β от fT, где f – произвольная несущая частота. Результаты численного моделирования по определению этой зависимости для значения

$\alpha = 0{,}005$ представлены на рис. 8.

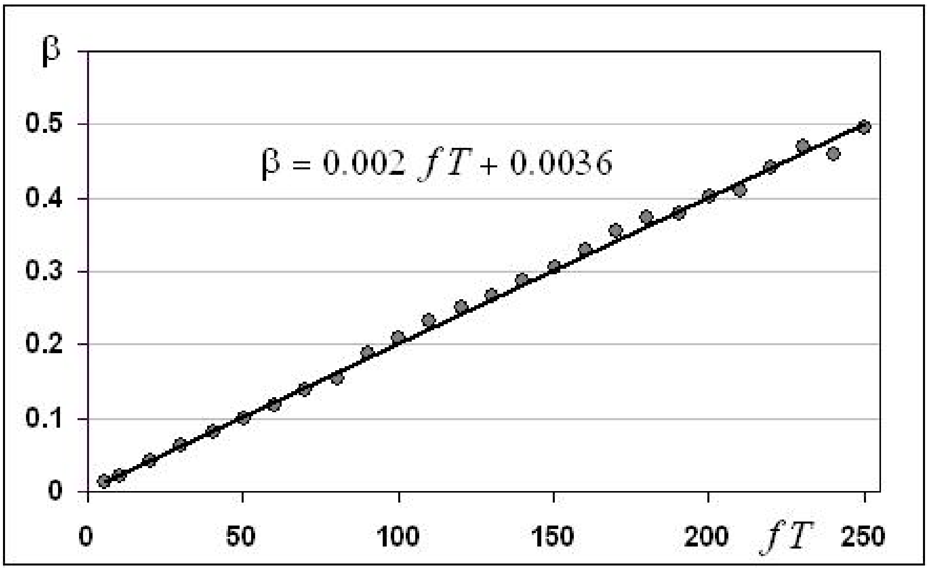

Рис. 8. Градуировочная зависимость $\beta(fT)$, снятая для фиксированного значения параметра α

Несомненно, положительным фактом является то, что полученная характеристика для указанного (и, как показали численные эксперименты, для других значений α) также оказалась линейной:

$$\beta = qfT + r\,. \tag{11}$$

Тот факт, что при постоянном значении α зависимость $\beta(fT)$ линейна, позволяет пользоваться для оценки α единственной градуировочной зависимостью (10), снятой на опорной частоте $f_0 T$. Если измеренная несущая частота ЛЧМ-сигнала равна f', то для оценки α в указанную функцию следует подставить $\beta = \beta' f_0 / f'$, где β' – измеренный коэффициент наклона линии (9). В результате, окончательная формула для оценки скорости изменения частоты ЛЧМ-сигнала выглядит следующим образом:

$$\alpha = p\beta' f_0 / f'\,, \tag{12}$$

где $p = 0{,}0725$ и $f_0 = 32{,}25$ Гц для выбранной длины цифровой реализации $N = TF = 512$ отсчетов.

Для окончательного определения мгновенной частоты (2) остается отметить, что за оценку несущей частоты сигнала (с точностью до спектрального разрешения ДПФ) можно принять $f' = m'/T$, где m' – адрес пика взаимного спектра амплитуд исходной, т.е. неусеченной пары реализаций с длиной $N_0 = N$ отсчетов, вычисляемый на шаге с номером $k = 0$ описанной выше процедуры снятия характеристики (9).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан новый метод оценивания скорости изменения мгновенной частоты линейно частотно-модулированного гармонического сигнала, основанный на фазовых соотношениях между перекрывающимися участками ЛЧМ-сигнала.

Предлагаемый метод является развитием высокоточного дифференциально-фазового метода определения частоты чистого и зашумленного гармонического сигнала [1] и его распространением на анализ частотно-модулированного гармонического сигнала.

Показано, что наиболее универсальным, «автомодельным» выражением скорости изменения частоты является безразмерный параметр $\alpha = \gamma T/F$, где γ – первая производная по времени мгновенной частоты сигнала, T – половина времени наблюдения сигнала, F – удвоенная ширина полосы частот, в которой протекает сигнал.

Метод позволяет оценить скорость изменения частоты ЛЧМ-сигнала с относительной погрешностью не более 10% в рабочем диапазоне $|\alpha| < \alpha^*$ изменений параметра α, граница которого $\alpha^* \approx 0{,}007$ соответствует заметной, и в то же время умеренной модуляции частоты. При этом несущая частота оценивается с точностью до спектрального разрешения ДПФ.

Алгоритмическая реализация метода достаточно простая, а вычислительная процедура сравнительно нетрудоемкая (требуется лишь отказ от алгоритма БПФ при вычислении ДПФ, что некритично для современных ПК).

Исследование фазовых соотношений может оказаться плодотворным не только в области спектрального фурье-анализа, но и для развития теории вейвлетов, чирплетов, варблетов и других типов преобразований сигналов.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$f(t)$ – мгновенная частота ЛЧМ-сигнала, Гц;
f_0 – несущая частота сигнала, Гц;
α – безразмерная скорость изменения частоты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ханян Г.С.** Дифференциально-фазовый метод определения частоты зашумленного гармонического сигнала // «Цифровая обработка сигналов и ее применение». 9-я международная конференция и выставка. 28-30 марта 2007 г., Москва, Институт проблем управления РАН. Доклады. В 2-х т. – Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова. Серия: Цифровая обработка сигналов и её применение. – Вып. IX-1, С. 84-87.

2. **Ханян Г.С.** Развитие и апробация дифференциально-фазового метода спектрального анализа при измерениях частоты и затухания моделируемых и реальных ЛДА-сигналов // Оптические методы исследования потоков: Труды 10-й Международной научно-технической конференции / Под ред. Ю.Н. Дубнищева, Б.С. Ринкевичюса – М.: Издательский дом МЭИ, 2009. – С. 90-93.

3. **Комаров И.В., Смольский С.М.** Основы теории радиолокационных систем с непрерывным излучением частотно-модулированных колебаний. М.: Горячая линия – Телеком, 2010. – 392 с.

4. **Kinzel M., Nobach H., Tropea C., and Bodenschatz E.,** Measurement of Lagrangian Acceleration Using the Laser Doppler Technique // in *Proc. 13th Int. Symp. on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics*, Lisbon, Portugal, 26-29 June, 2006, 11 pp.

5. **Wang M., Chan A.K., and Chui Ch. K.** Linear frequency-modulated signal detection using Radon-ambiguity transform // *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 46, no. 3, March 1998, pp. 571-586.

6. **Баскаков С.И.** Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая Школа, 1988. – 448 с.

7. **Сергиенко А.Б.** Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2002. – 608 с.

8. **Ханян Г.С., Шеина Н.В.** Система цифровой обработки сигналов для информационного обеспечения стендовых испытаний ГТД // “Научный вклад в создание авиационных двигателей”. Сб. трудов ЦИАМ под ред. В.А. Скибина и В.И. Солонина. – М.: “Машиностроение”, 2000, кн. 2, с. 534-536.

G.S. Khanyan

Central Institute of Aviation Motors, Russia,
111116, Moscow, Aviamotornaya st., 2, E-mail: dep007@rtc.ciam.ru

DETERMINATION OF LFM-SIGNAL'S INSTANTANEOUS FREQUENCY BY PHASE-DIFFERENTIAL METHOD OF SPECTRAL ANALYSIS

A method for determining instantaneous frequency of LFM-signal (frequency-modulated harmonic oscillation with a linear time-varying frequency) is proposed. The method is based on phase relationships obtained by means of discrete Fourier transform of the signal's limited-duration overlapping fragments. Numerical experiments on LFM-signal mathematical modeling and processing are performed to verify the method and determine the boundaries of its applicability.

LFM-SIGNAL, DISCRETE FOURIER TRANSFORM, PHASE DIFFERENCE SPECTRUM, ESTIMATION OF FREQUENCY, ERRORS