



УДК 621.37: 681.7.069.24

А.И. Белоусова, В.А. Гречихин, Д.А. Титов

*Национальный исследовательский университет «МЭИ», Россия,
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14,
GrechikhinVA@mpei.ru, TitovDA@mpei.ru*

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНКИ ИНДЕКСА УГЛОВОЙ МОДУЛЯЦИИ СИГНАЛА ГЕТЕРОДИННОГО ЛАЗЕРНОГО ДОПЛЕРОВСКОГО ВИБРОМЕТРА

АННОТАЦИЯ

В докладе приводятся результаты исследований апостериорной плотности вероятности оценки индекса угловой модуляции сигнала гетеродинного лазерного доплеровского виброметра (ЛДВ), наблюдаемого в смеси с аддитивным гауссовым шумом. Проведено сравнение результатов аналитического расчета закона распределения информационного параметра с результатами численного моделирования работы одноконтурной системы оптимальной нелинейной фильтрации. Полученные данные позволяют сформулировать условия, при которых гипотеза о гауссовой модели апостериорного распределения может с определенной вероятностью считаться справедливой.

ЛАЗЕРНЫЙ ДОПЛЕРОВСКИЙ ВИБРОМЕТР, АПОСТЕРИОРНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ИНФОРМАЦИОННОГО ПАРАМЕТРА, ОТНОШЕНИЕ СИГНАЛ-ШУМ, ВРЕМЯ НАБЛЮДЕНИЯ, СХЕМА ОПТИМАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Для бесконтактной оценки параметров виброколебаний различных объектов давно и с успехом используются оптические методы и устройства, а именно – лазерные приборы вибрационного контроля и точного позиционирования [1, 2]. Так амплитуду вибро смещения объекта можно оценить по измеренному значению индекса угловой модуляции сигнала гетеродинного лазерного доплеровского виброметра (ЛДВ) и известному периоду интерференционного поля в области измерительного объема ЛДВ [1]. В [3, 4] предложен квазиоптимальный алгоритм текущей оценки меняющегося во времени индекса угловой модуляции сигнала ЛДВ, основанный на методе оптимальной нелинейной фильтрации и реализуемый синтезированной в соответствии с данным методом многоконтурной следящей системой. Синтез алгоритма выполнен в рамках гипотезы о гауссовой модели апостериорного распределения информационного параметра.

В отличие от задачи линейной фильтрации, когда при гауссовой статистике аддитивного шума апостериорная плотность вероятности (АПВ) информационного параметра также является гауссовой, в задаче нелинейной фильтрации АПВ, как правило, оказывается негауссовой. В этих случаях обычно не удается получить точное решение задачи фильтрации, и используют те или иные приближенные методы. Практически наибольшее распространение получило гауссово приближение, при котором АПВ полагается

гауссовой, и которое в задачах нелинейной фильтрации дает хорошие результаты при больших отношениях сигнал-шум. В то же время встречаются задачи [5], в которых данное приближение дает неудовлетворительные результаты, и необходимо искать другие аппроксимации.

В докладе приводятся результаты исследований апостериорной плотности вероятности оценки индекса угловой модуляции сигнала гетеродинного ЛДВ, наблюдаемого в смеси с аддитивным гауссовым широкополосным шумом. Данные результаты позволяют сформулировать условия, при которых гипотеза о гауссовой модели апостериорного распределения может с определенной вероятностью считаться справедливой.

СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА АПОСТЕРИОРНОЙ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ИНФОРМАЦИОННОГО ПАРАМЕТРА СИГНАЛА ЛДВ

Пусть наблюдаемая на интервале времени $(0, T)$ аддитивная смесь сигнала ЛДВ и шума имеет вид

$$y(t) = u(t) + n(t), \quad (1)$$

где полезный сигнал $u(t)$ описывается выражением:

$$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t + m \cdot \sin(\Omega t + \Phi) + \varphi], \quad (2)$$

а $n(t)$ – белый гауссов шум с корреляционной функцией $R(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(\tau)$ и двусторонней

спектральной плотностью $\frac{N_0}{2}$. При этом информационный параметр m прямо пропорционален амплитуде вибро смещения и связан с ней известным соотношением: $m = 2\pi \frac{L}{\Lambda}$, где L – оцениваемая амплитуда, Λ – период интерференционной картины в измерительном объеме ЛДВ [3].

Рассмотрим задачу оценки закона распределения параметра m в конце интервала наблюдения $(0, T)$, полагая для определенности m случайной величиной с априорным равномерным распределением на отрезке $[m_{\min}, m_{\max}]$.

При гауссовом шуме наблюдения апостериорную плотность вероятности параметра m можно представить в виде [5]:

$$p_{ps}(m) = k \cdot p_{ap}(m) \cdot p(y_0^T | m) = c \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [y(t) - u(t, m)]^2 dt \right\}, \quad (3)$$

где $p_{ap}(m)$ – априорная плотность вероятности параметра m ; $p(y_0^T | m)$ – условная плотность вероятности наблюдения реализации $y(t)$ на интервале $(0, T)$ при заданном значении m ; k и c – нормировочные константы; $u(t, m)$ – полезный сигнал (2), рассматриваемый как функция двух переменных: t и m .

Положим, что в наблюдаемой реализации оцениваемый параметр имеет значение $m_{\text{ист}}$. В предположении малого уровня аддитивного шума выражение (3) можно приближенно представить в виде:

$$p_{ps}(m) = c \cdot \exp \left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T u(t, m_{ucm}) \cdot u(t, m) dt - \frac{2E}{N_0} \right\}, \quad (4)$$

где $E = \int_0^T u^2(t, m) dt$ - энергия сигнала на интервале времени $(0, T)$.

Подставляя выражение для $u(t, m)$ в (4), получим:

$$p_{ps}(m) = c \cdot \exp \left\{ \frac{U_m^2 T}{2} \frac{2}{N_0} \frac{1}{T} \int_0^T \cos[(m - m_{\dot{\eta}\dot{\delta}}) \cdot \sin(\Omega t + \Phi)] dt - \frac{2E}{N_0} \right\}.$$

Обозначим:

$$q = \frac{2E}{N_0} = \frac{U_m^2 T}{N_0} - \text{отношение сигнал-шум,}$$

$$\Delta\varphi = \Omega T = 2\pi \frac{T}{T_V} - \text{полный набег фазы виброколебаний за время наблюдения } T,$$

где T_V - период виброколебаний, T/T_V - число периодов виброколебаний, укладываемых на интервале времени наблюдения.

С учетом этих обозначений окончательно имеем:

$$p_{ps}(m) = c \cdot \exp \left\{ q \frac{1}{\Delta\varphi} \int_0^{\Delta\varphi} \cos[(m - m_{ucm}) \cdot \sin(x + \Phi)] dx - q \right\}. \quad (5)$$

Константа c выбирается из условия нормировки:

$$\int_0^{\infty} p_{ps}(m) dm = 1.$$

Введем обозначение $M = m - m_{ucm}$ и разложим подынтегральное выражение в (5) в ряд по функциям Бесселя:

$$\cos(M \sin(x)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(M) \cos(nx) = J_0(M) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} J_{2n}(M) \cos(2nx). \quad (6)$$

В случае, если интервал наблюдения равен целому числу полупериодов виброколебаний, $\Delta\varphi = \pi k$, $k = 1, 2, \dots$. При этом

$$\int_{\Phi}^{\Phi+\Delta\varphi} \left[2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} J_{2n}(M) \cdot \cos(2n\xi) \right] d\xi = 0.$$

Тогда

$$\int_0^{\Delta\varphi} \cos[M \cdot \sin(x + \Phi)] dx = \int_{\Phi}^{\Phi + \Delta\varphi} \left[J_0(M) + 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} J_{2n}(M) \cdot \cos(2n\xi) \right] d\xi = J_0(M) \cdot \Delta\varphi, \quad (7)$$

и выражение (5) с учетом (7) принимает вид:

$$p_{ps}(m) = c \cdot \exp\{q \cdot J_0(m - m_{ucm}) - q\}. \quad (8)$$

Из условия нормировки (с учетом четности функции $J_0(x)$) константа c определяется соотношением

$$c = \frac{1}{2 \cdot \int_0^{\infty} \exp\{q \cdot [J_0(x) - 1]\} dx}.$$

Видно, что значение константы зависит только от отношения сигнал-шум.

Окончательное выражение для апостериорной плотности вероятности параметра m для частного случая, когда интервал наблюдения равен целому числу полупериодов виброколебаний, имеет вид:

$$p_{ps}(m) = \frac{\exp\{q \cdot [J_0(m - m_{ucm}) - 1]\}}{2 \cdot \int_0^{\infty} \exp\{q \cdot [J_0(x) - 1]\} dx}. \quad (9)$$

Из (9) следует, что в данном случае максимумы функции $p_{ps}(m)$ определяются максимумами функций Бесселя нулевого порядка. В общем случае апостериорное распределение рассчитывается с использованием (5).

АНАЛИЗ АПОСТЕРИОРНОЙ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ПАРАМЕТРА m МЕТОДОМ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

На основании вышеприведенного анализа можно сделать вывод, что АПВ параметра m в общем случае будет зависеть от отношения сигнал-шум, длительности интервала наблюдения, а также от величины периода и начальной фазы виброколебаний. Проведём исследование АПВ с использованием (5).

На рис. 1 представлены результаты расчета АПВ параметра m для различных значений отношения сигнал-шум для случая, когда интервал наблюдения составляет целое число полупериодов виброколебаний. Видно, что максимум апостериорного распределения имеет место при $m = m_{ист}$, и дисперсия распределения, как и следовало ожидать, уменьшается с ростом отношения сигнал-шум.

На рис. 2 представлены те же графики, построенные в логарифмическом масштабе по оси ординат. Видно, что при малых отношениях сигнал-шум в законе распределения начинают появляться дополнительные максимумы (моды). Координаты дополнительных максимумов по оси абсцисс, как и следует из (9), совпадают с локальными максимумами функции Бесселя $J_0(M)$.

На вид АПВ параметра m оказывает существенное влияние отношение длительности интервала наблюдения к величине периода виброколебаний. Графики АПВ для разных значений отношения T/T_v приведены на рис. 3. Видно, что с ростом времени наблюдения достоверность оценки растет. В случае, когда отношение T/T_v мало, на вид апостериорного

распределения оказывает существенное влияние начальная фаза виброколебаний. Это хорошо видно из сравнения распределений, показанных на рис. 3 и рис.4.

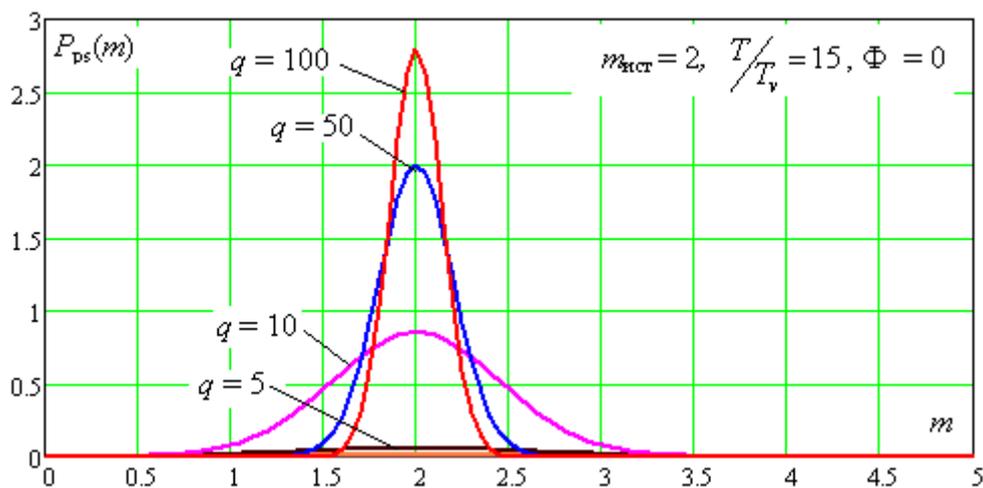


Рис.1. Графики АПВ параметра m при разных отношениях сигнал-шум

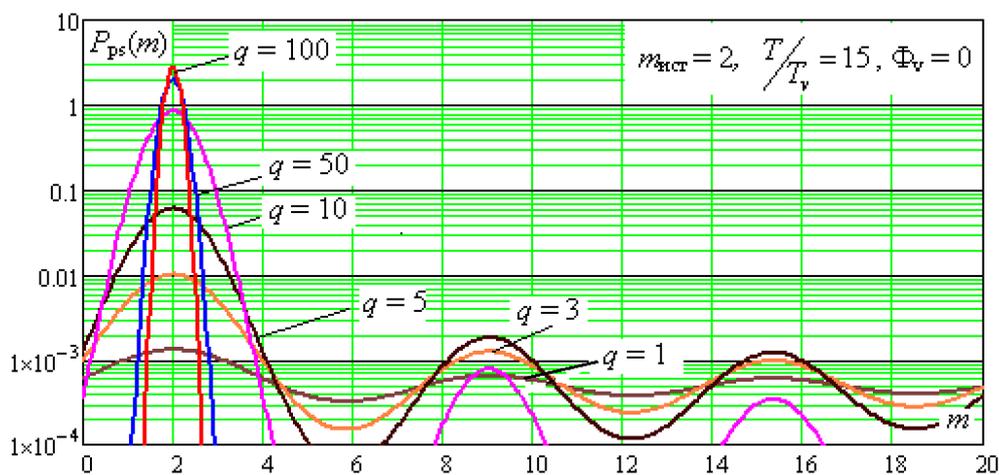


Рис. 2. Графики АПВ параметра m при логарифмическом масштабе по оси ординат

Начальная фаза виброколебаний оказывает существенное влияние на вид апостериорного распределения и в случае, когда отношение сигнал-шум мало. На рис. 5, а и рис. 5, б приведены графики АПВ для двух разных значений начальной фазы Φ_v . Сравнение графиков показывает, что при малом отношении сигнал-шум распределение является многомодовым при любых значениях начальной фазы виброколебаний, но соотношение между локальными максимумами АПВ зависит от значения данной фазы. Данная зависимость проявляется особенно сильно при малой длительности интервала наблюдения, когда она составляет менее половины периода виброколебаний.

Таким образом, на основании проведенного численного анализа графиков АПВ можно сделать вывод, что закон распределения информационного параметра m будет иметь практически одномодовый характер для любых значений начальной фазы виброколебаний при отношении сигнал-шум $q > 10$ и длительности интервала наблюдения $T > T_v$. На рис. 6а и рис. 6, б приведены законы распределения информационного параметра для отношения сигнал-шум $q = 10$. Сравнение графиков показывает, что при длительности интервала наблюдения, превышающем половину периода виброколебаний, АПВ информационного параметра остается одномодовой для различных значений начальной фазы виброколебаний.

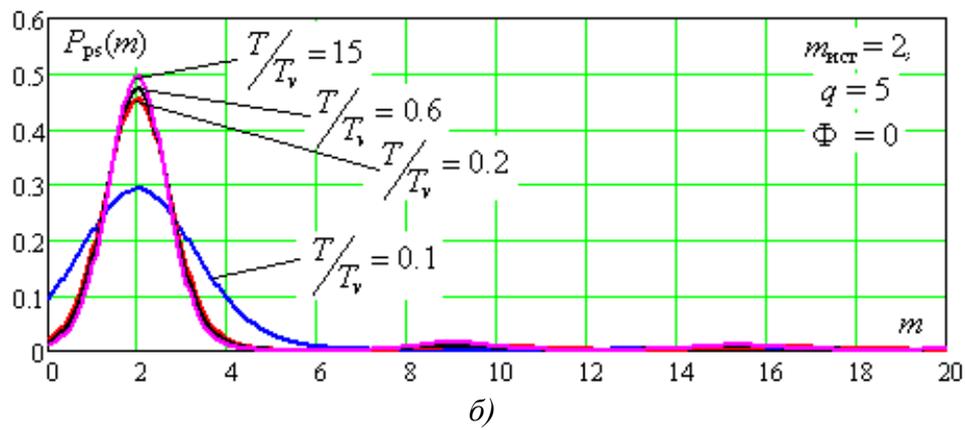


Рис. 3. Влияние отношения длительности интервала наблюдения к величине периода виброколебаний на АПВ параметра m

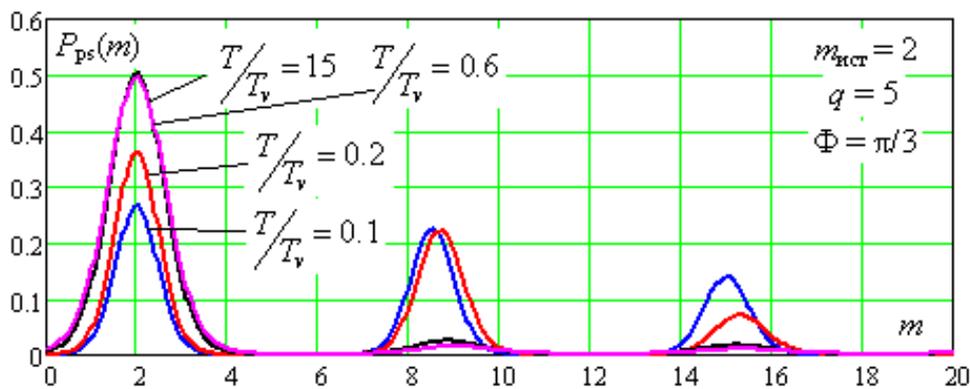


Рис. 4. Графики АПВ параметра m для значения начальной фазы $\Phi = \pi/3$

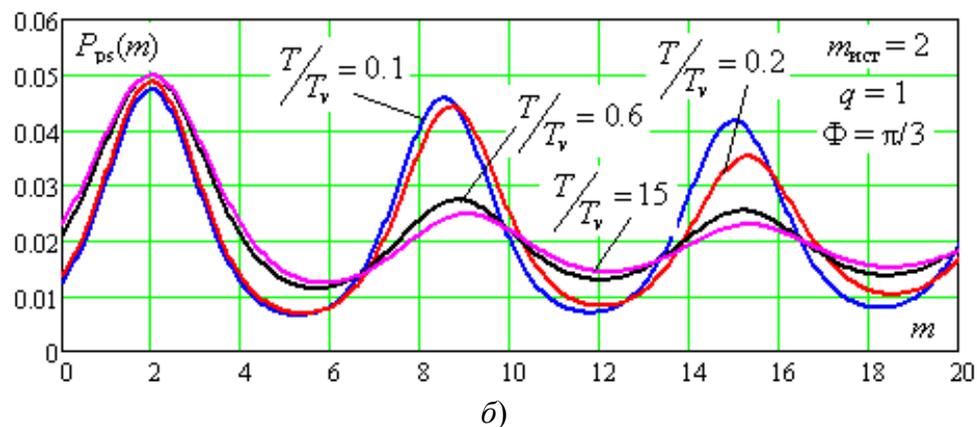
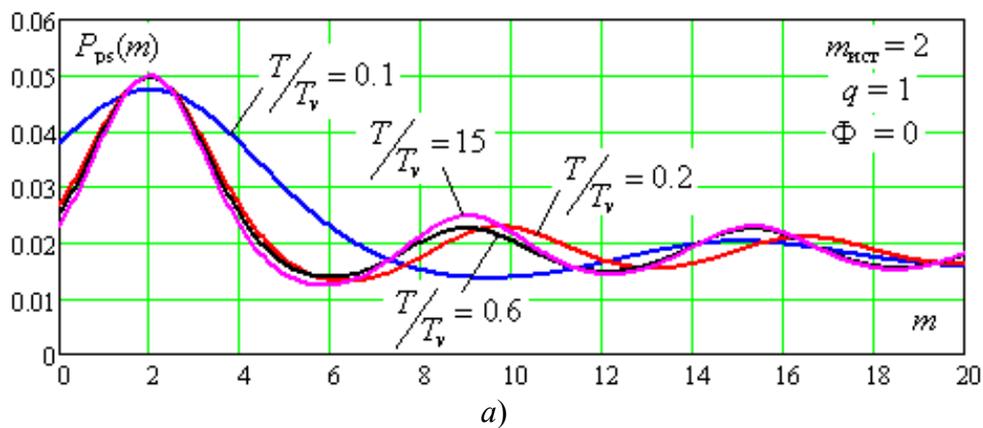


Рис. 5. Графики АПВ при малом отношении сигнал-шум для двух значений начальной фазы виброколебаний

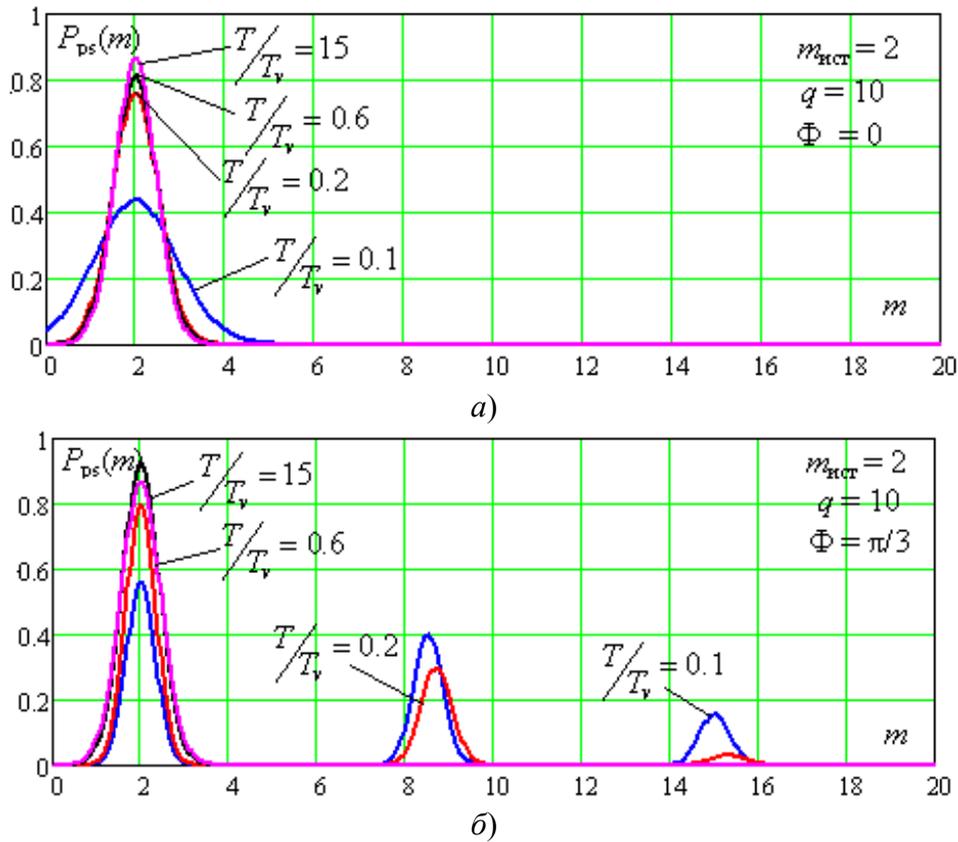


Рис. 6. Графики АПВ информационного параметра при большом отношении сигнал-шум

Случай, когда отношение T/T_v мало, при использовании системы оптимальной нелинейной фильтрации соответствует малой постоянной времени следящего фильтра, когда управляющий сигнал формируется за малый интервал времени. Постоянная времени фильтра, в свою очередь, определяется шириной спектра флуктуаций информационного параметра. Таким образом, если данная ширина спектра будет существенно меньше, чем значение частоты виброколебаний, то условия режима слежения, при которых будет формироваться одномодовая АПВ, удастся выполнить.

ОЦЕНКА АПВ ПАРАМЕТРА m ПО РЕЗУЛЬТАТАМ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАБОТЫ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ

Для проверки гипотезы о многомодовом распределении параметра m было проведено моделирование следящей системы, разработанной в [3]. На вход системы слежения подавалась смесь сигнала и шума (1). Флуктуации информационного параметра $m_{ист}(t)$ описывались стохастическим дифференциальным уравнением 1-го порядка, а его среднее значение было равно $m_{ист_ср}=2$. Остальные параметры сигнала (2) определялись соотношениями: $U_m=1$, $\Phi=\pi/3$, φ – случайная величина с равномерным законом распределения в интервале $(-\pi, \pi)$, $\omega_0=2\pi/(20T_d)$, $\Omega=2\pi/(400T_d)$, где T_d – интервал дискретизации. Среднее квадратическое отклонение аддитивного гауссова шума $\sigma = 2$.

На рис. 7 приведены временные диаграммы реализаций параметра $m_{ист}(t)$ и его оценки $\hat{m}(t)$, полученной на выходе следящей системы. Сравнение рис. 7 и рис. 5, б показывает, что оценка информационного параметра действительно имеет дополнительные максимумы АПВ, расположение которых определяется из (9). На рис. 8 приведены аналогичные зависимости от времени параметров $m_{ист}(t)$ и $\hat{m}(t)$, полученные для случая, когда к случайным флуктуациям параметра $m_{ист}(t)$ был добавлен детерминированный гармонический тренд

$$m_{\text{ист_ср}}(t) = 2 + 2 \cdot \cos(2\pi t / 10000T_d).$$

Анализ рис. 8 показывает, что и в этом случае АПВ информационного параметра имеет дополнительно к основной боковые моды, параметры которых соответствуют (9).

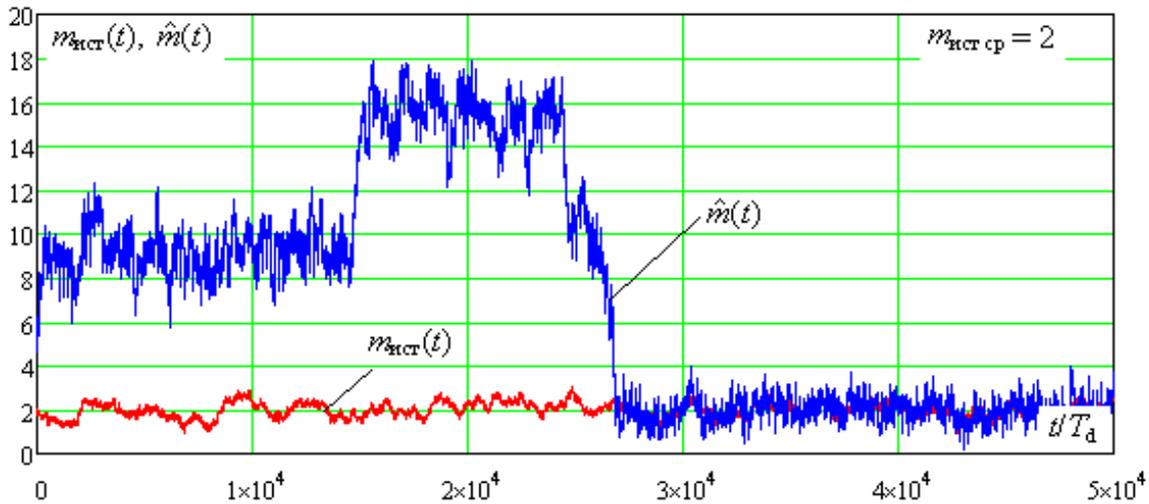


Рис. 7. Временные диаграммы реализаций параметра $m_{\text{ист}}(t)$ и его оценки $\hat{m}(t)$

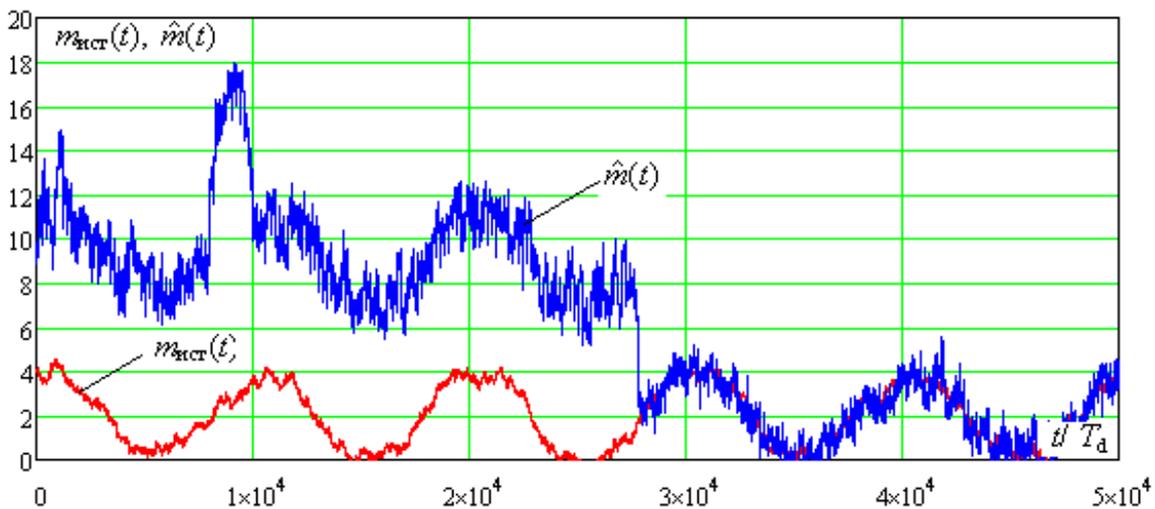


Рис. 8. Временные диаграммы реализаций параметра $m_{\text{ист}}(t)$ и его оценки $\hat{m}(t)$ при наличии детерминированного гармонического тренда

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ показал, что в общем случае при условии наблюдения сигнала гетеродинного ЛДВ в смеси с аддитивным гауссовым широкополосным шумом закон распределения индекса угловой модуляции сигнала, прямо пропорционального амплитуде виброколебаний, оказывается многомодовым. Расположение дополнительных локальных максимумов дифференциального закона распределения может быть найдено из соотношения (5). На уровень дополнительных максимумов АПВ существенное влияние оказывают отношение сигнал-шум и время наблюдения, при малых значениях которых вероятность наличия боковых мод оказывается сравнимой с вероятностью основной моды. И наоборот, закон распределения информационного параметра m будет иметь практически одномодовый

характер для любых значений начальной фазы виброколебаний при отношении сигнал-шум $q > 10$ и длительности интервала наблюдения $T > T_v$. Случай, когда отношение T/T_v мало, при использовании системы оптимальной нелинейной фильтрации соответствует малой постоянной времени следящего фильтра, которая в свою очередь определяется шириной спектра флуктуаций информационного параметра. Таким образом, если данная ширина спектра будет существенно меньше, чем значение частоты виброколебаний, то условия режима слежения, при которых будет формироваться одномодовая АПВ, удастся выполнить.

В случае, когда информационный параметр испытывает быстрые флуктуации, ширина спектра которых превышает или сравнима с частотой виброколебаний, необходимо будет принимать специальные меры для слежения за основной модой апостериорного распределения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Застрогин Ю.Ф. и др.** Лазерные приборы вибрационного контроля и точного позиционирования / М.: Машиностроение. 1995. – 320с.
2. **Коронкевич В.П., Соболев В.С., Дубнищев Ю.Н.** Лазерная интерферометрия / М.: Наука. 1983. - 216с.
3. **Гречихин В.А.** Оценка относительной амплитуды вибросмещения в лазерном доплеровском виброметре // Автометрия. 2012. Т. 48. № 3. С. 33-38.
4. **Гречихин В.А., Титов Д.А.** Квазиоптимальная нелинейная фильтрация сигнала лазерного доплеровского виброметра // Автометрия. 2014. Т.50, № 5. С.99-107.
5. **Перов А.И.** Статистическая теория радиотехнических систем. Учеб. пособие для вузов. – М.: Радиотехника, 2003, 400 с.

A.I. Belousova, V.A. Grechikhin, D.A. Titov

*National research university "MPEI", Russia,
111250, Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14,
GrechikhinVA@mpei.ru, TitovDA@mpei.ru*

DISTRIBUTION LAW OF AN ANGULAR MODULATION INDEX ASSESSMENT OF THE HETERODYNE LASER DOPPLER VIBROMETER SIGNAL

The results of researches of aposteriorny density of probability of an angular modulation index assessment of the heterodyne laser Doppler vibrometer (LDV) signal observed in mix with additive Gaussian noise are given in the report. Comparison of results of an analytical calculation of the distribution law of information parameter with results of numerical modeling of the one-loopback system of an optimum nonlinear filtration is carried out. The received results allow to formulate conditions under which the hypothesis of Gaussian model of aposteriorny distribution with a certain probability is fair.

LASER DOPPLER VIBROMETER, APOSTERIORNY DENSITY OF PROBABILITY OF INFORMATION PARAMETER, SIGNAL-TO-NOISE RATIO, SUPERVISION TIME, SCHEME OF AN OPTIMUM NONLINEAR FILTRATION, MATHEMATICAL MODELLING