

*Тринадцатая Международная научно-техническая конференция  
«Оптические методы исследования потоков»  
Москва, 29 июня — 03 июля 2015 г.*

УДК 535.321.9

И.Л. Расковская, А.В. Ведяшкина, Е.В. Зелепукина

*Национальный исследовательский университет «МЭИ», Россия,  
111250, Москва, Красноказарменная ул., 14, E-mail: [avedyashkina@rambler.ru](mailto:avedyashkina@rambler.ru)*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ СРЕД  
С ПОМОЩЬЮ РЕГИСТРАЦИИ КАУСТИК ПРИ РЕФРАКЦИИ  
СТРУКТУРИРОВАННОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ**

**АННОТАЦИЯ**

Исследованы условия возникновения каустик при продольном зондировании стратифицированных оптически неоднородных сред структурированными лазерными пучками, визуализирующимися в сечении как семейство геометрических фигур. Показано, что в плоскости наблюдения на выходе из среды проекция каустической поверхности отображается как огибающая экстремумов рефракционного смещения элементов структуры пучка. Данный факт позволяет экспериментально определять положение каустики без регистрации распределения интенсивности в рефракционном изображении. Регистрируемые геометрические параметры каустики используются для решения обратной задачи рефракции в целях реконструкции физических характеристик среды, обуславливающих неоднородность показателя преломления. Описана экспериментальная схема установки для визуализации картин рефракции структурированного лазерного излучения в диффузионном слое жидкости.

**СТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ СРЕДЫ, СТРУКТУРИРОВАННОЕ ЛАЗЕРНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ,  
ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА, КАУСТИКА, ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ РЕФРАКЦИИ,  
ЛАЗЕРНАЯ РЕФРАКТОГРАФИЯ**

**ВВЕДЕНИЕ**

Исследование оптически неоднородных сред представляет значительный интерес, т.к. часто важно знать, как изменяется показатель преломления среды при нагреве или охлаждении, при изучении процессов диффузии, оптимизации работы нагревательных или охлаждающих элементов и др. В случае диагностики протяженных оптически неоднородных средах из-за наличия сильной рефракции возникают определенные сложности при применении классических теневых методов [1]. Поэтому в такой ситуации целесообразно использовать методы, в которых информативным параметром является линейное или угловое рефракционное смещение тонкого пучка или элементов структурированного пучка, формируемого на основе дифракционных оптических элементов (ДОО) [2]. Одним из таких методов является метод лазерной рефрактографии [3, 4], основанный на явлении рефракции структурированного лазерного излучения (СЛИ), зондирующего неоднородную среду, с последующей регистрацией смещения элементов СЛИ на рефракционных изображениях (рефрактограммах).

Структурированные пучки визуализируются в сечении как семейство геометрических фигур, например, окружностей, отрезков или как матрица точек. Использование

структурированных лазерных пучков хорошо зарекомендовало себя при количественной диагностике температурных и плотностных стратификаций в жидкостях [5]. При рефракции в неоднородной среде происходит искажение элементов структуры пучка, возникающее из-за рефракционного смещения, которое является информативным фактором при решении обратной задачи определения физических параметров среды. Рис.1 демонстрирует изображение, полученное при зондировании пограничного слоя у нагретого шара в жидкости. До входа в неоднородность структурированный пучок визуализировался в сечении как семейство окружностей.



Рис. 1. Экспериментальная визуализация рефракции структурированного лазерного пучка в пограничном слое жидкости у нагретого шара

На рефракционных изображениях сечений структурированных пучков как правило имеются характерные точки или кривые, положение которых дает дополнительную информацию для диагностики параметров среды. Положение таких характерных элементов изображения определяется в частности геометрией каустик [6 – 11], возникающих как внутри, так и вне протяженной среды в условиях сильной рефракции.

Например, на изображении, представленном на рис. 1, наблюдаются локальные экстремумы элементов структуры пучка. Как показано в [12], огибающая этих экстремумов совпадает с положением проекций каустических поверхностей на плоскость наблюдения (т.е. на экран). Если бы зондирование осуществлялось широким пучком, то проекция каустической поверхности визуализировалась бы как яркая линия на изображении, что требовало бы измерения интенсивности при ее регистрации. Использование структурированных пучков позволяет осуществлять регистрацию положения каустик по геометрическим параметрам изображения. Информация о локализации каустик дает дополнительные возможности количественной диагностики исследуемых сред.

## УСЛОВИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ КАУСТИК И ИХ ОТОБРАЖЕНИЕ НА РЕФРАКТОГРАММАХ СТРУКТУРИРОВАННЫХ ПУЧКОВ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ЗОНДИРОВАНИИ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЫ

Следуя [12], покажем, что каустика на экране отображается как огибающая экстремумов элементов структурированного пучка.

Пусть лазерный пучок распространяется вдоль оси  $z$  в двумерно-неоднородной среде с показателем преломления  $n(\xi, \eta)$  (рис. 2). Предположим, что известен эйконал  $L(\xi, \eta)$  непосредственно на выходе из среды при  $z = 0$ , который связан с фазой пучка  $\varphi(\xi, \eta)$  известным соотношением [11]:

$$\varphi(\xi, \eta) = kL(\xi, \eta), \quad (1)$$

где  $k$  – волновое число.

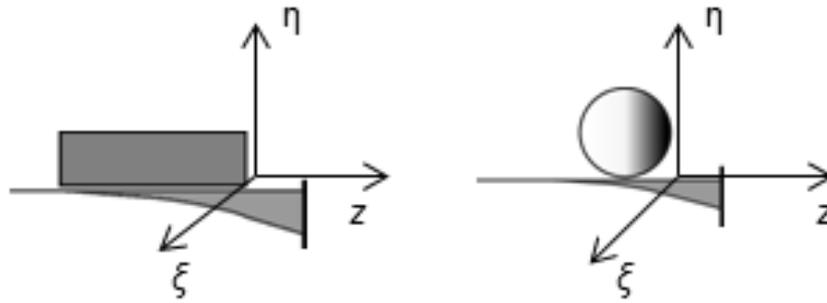


Рис.2. Рефракция лазерного пучка при продольном и касательном зондировании соответственно плоской и радиальной стратификаций (пограничного слоя у нагретого тела в воде)

Геометрооптический луч вне среды является прямой линией с направляющими косинусами  $\cos \alpha$  и  $\cos \beta$ , определяемыми из соотношений:

$$\cos \alpha = \frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{k \partial \xi} = \frac{\partial L(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \quad (2)$$

$$\cos \beta = \frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{k \partial \eta} = \frac{\partial L(\xi, \eta)}{\partial \eta}. \quad (3)$$

Тогда параметрические уравнения луча, с лучевыми координатами  $(\xi, \eta, \tau)$  имеют вид:

$$x = \xi + \tau \frac{\partial L(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \quad (4)$$

$$y = \eta + \tau \frac{\partial L(\xi, \eta)}{\partial \eta}, \quad (5)$$

$$z = \tau \sqrt{1 - \left( \frac{\partial L(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right)^2 - \left( \frac{\partial L(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right)^2}. \quad (6)$$

Условие возникновения каустики определяется равенством нулю якобиана  $D$ , определяемого как

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \tau} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \tau} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \tau} \end{vmatrix}. \quad (7)$$

При выполнении соотношений

$$\left( \frac{\partial L(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right)^2 \ll 1, \quad (8)$$

$$\left( \frac{\partial L(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right)^2 \ll 1, \quad (9)$$

которые часто имеют место на практике, параметрические уравнения луча упрощаются и принимают вид

$$x = \xi + z \frac{\partial L(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \quad (10)$$

$$y = \eta + z \frac{\partial L(\xi, \eta)}{\partial \eta}, \quad (11)$$

$$z = \tau, \quad (12)$$

а из равенства

$$D=0 \quad (13)$$

следует условие возникновения каустики вне среды:

$$1 + z \left( \frac{\partial^2 L(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 L(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right) + z^2 \left( \frac{\partial^2 L(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 L(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} - \left( \frac{\partial L(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right) = 0. \quad (14)$$

Для плоскослоистой стратификации с показателем преломления  $n(\eta)$  (14) принимает вид

$$1 + z \frac{\partial^2 L(\eta)}{\partial \eta^2} = 0. \quad (15)$$

В этом случае  $x = \xi$  и уравнение каустической поверхности в явном виде может быть получено при определении из (15) функциональной зависимости  $\eta_c(z)$  и подстановке ее в (11):

$$y_c(x, z) = \eta_c(z) + z \frac{\partial L(x, \eta_c)}{\partial \eta_c}. \quad (16)$$

Выясним, каким образом отображаются каустики в плоскости наблюдения рефракционного изображения при  $z = \text{const}$ , если среда зондируется структурированным пучком.

Зададим математическую модель элемента структуры пучка при  $z = 0$ :

$$\eta = \eta_s(\xi) \quad (17)$$

и исследуем поведение функции, отображающей рефракционное изображение (рефрактограмму)  $y(x)$  этого элемента при наличии каустики в плоскости наблюдения. Как следует из (10 – 11), рефракционное изображение рассматриваемого элемента описывается параметрической зависимостью  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$ . Найдем возможные экстремумы функции  $y(x)$ , определив полные дифференциалы  $dx$  и  $dy$ :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta. \quad (18, 19)$$

Определим дифференциал  $d\eta$ , задаваемый функциональной связью (17):

$$d\eta = \frac{\partial \eta_s(\xi)}{\partial \xi} d\xi, \quad (20)$$

и воспользуемся тем, что на каустической поверхности при  $z = \text{const}$  выполняется

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = 0. \quad (21)$$

Тогда из (21) следует

$$\frac{dx}{d\eta} = \frac{\left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)}{\frac{\partial y}{\partial \xi}} \quad (22)$$

и при подстановке (20) и (22) в систему уравнений (18-19) получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \xi}}{\frac{\partial x}{\partial \xi}}. \quad (23)$$

Откуда следует, что для стратифицированной среды при  $\frac{\partial y}{\partial \xi} = 0$  в плоскости наблюдения на проекции каустической поверхности, определяемой (21), имеют место локальные экстремумы рефрактограммы  $y(x)$ . Т.е. каустики, в случае структурированного излучения, представляют собой огибающие точек экстремумов, возникающих при рефракционном искажении структурных элементов пучка. При отсутствии каустик экстремумы на изображении не наблюдаются.

Сделанные выводы были подтверждены результатами компьютерного моделирования на основе решения волнового уравнения в квазиоптическом приближении [13] и экспериментально.

## РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РЕФРАКЦИИ ДЛЯ ДИФФУЗИОННОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ НА ОСНОВЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ КАУСТИК

Диффузионный слой жидкости – особый вид неоднородности, который возникает при контакте двух сред с различными физическими характеристиками (показателями преломления). Диффузионный слой является стратифицированной средой, показатель преломления в нем зависит только от одной декартовой координаты. Таким образом, если медленно наливать тонким слоем менее плотную жидкость с показателем преломления  $n_1$  на поверхность более плотной жидкости с показателем преломления  $n_2$ , то со временем между ними образуется диффузионный слой, показатель преломления в котором может быть описан через функцию гиперболического тангенса [5]:

$$n(x) = \frac{n_1 + n_2}{2} + \frac{n_1 - n_2}{2} \text{th} \left( \frac{x - x_s}{h} \right), \quad (26)$$

где  $h$  – характеристическая полуширина слоя,  $x_s$  – середина слоя. Границы слоя  $x_1$  и  $x_2$  определяются по уровню отклонения показателя преломления от значений  $n_1$  и  $n_2$  на  $10^{-5}$  соответственно.

Этот тип неоднородности может быть зондирован СЛИ различной формы: линией, матрицей точек, набором конических колец, крестом и т.д. Компьютерная и экспериментальная 3D-визуализация рефракции плоского лазерного пучка и динамика образования каустик при изменении угла наклона лазерной плоскости и градиента показателя преломления представлены в работе [14].

Формула (27) – это уравнение траектории луча в плоскослоистой среде с распределением показателя преломления  $n(x)$  и начальными условиями  $z_0 = z(0)$ ,  $\alpha_0$  – угол, под которым луч входит в среду,  $n_0$  – показатель преломления в точке входа луча в среду:

$$z(x) = z_0 + \int_0^x \frac{n_0 \sin \alpha_0 dx}{\pm \sqrt{n^2(x) - n_0^2 \sin^2 \alpha_0}}. \quad (27)$$

Используя это выражение, произведено моделирование распространения плоского лазерного пучка в диффузионном слое жидкости. Рассмотрим случай, когда в среде создан диффузионный слой со следующими параметрами:  $n_1 = 1,3400$ ,  $n_2 = 1,3320$ ,  $x_s = 50$  мм,  $h = 1,1$  мм. На рис. 3 изображено формирование и место слияния двух каустик. Используя теоретически рассчитанную рефрактограмму, можно определить положение, форму каустик и место их слияния, что дает возможность решить обратную задачу восстановления свойств среды при сравнении с экспериментальными результатами.

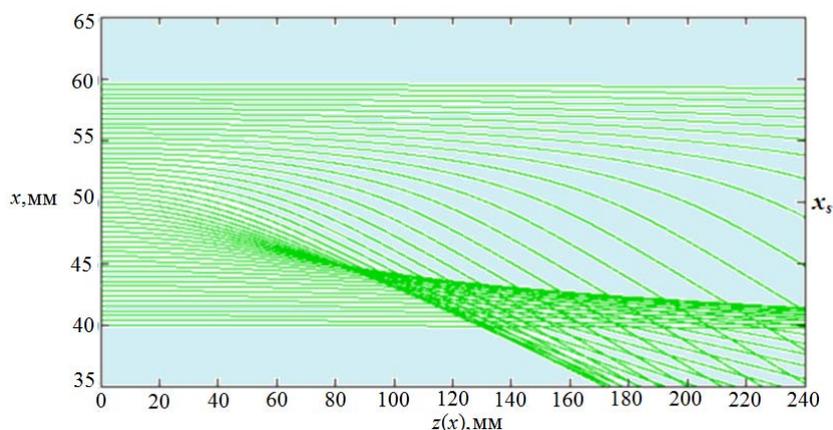


Рис. 3. Формирование каустик при распространении плоского лазерного пучка в диффузионном слое жидкости

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ РЕГИСТРАЦИЯ КАУСТИК В ДИФФУЗИОННОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ

С целью наблюдения и регистрации каустик при распространении плоского лазерного пучка в диффузионном слое жидкости может быть использована экспериментальная установка, изображенная на рис. 4. С помощью лазера 1 и оптической системы 2 создан плоский лазерный пучок, зондирующий диффузионный слой 4 в кювете 3. 2D-рефрактограмма 6 регистрируется с помощью цифровой камеры 5 и в последующем обрабатывается на персональном компьютере 7.

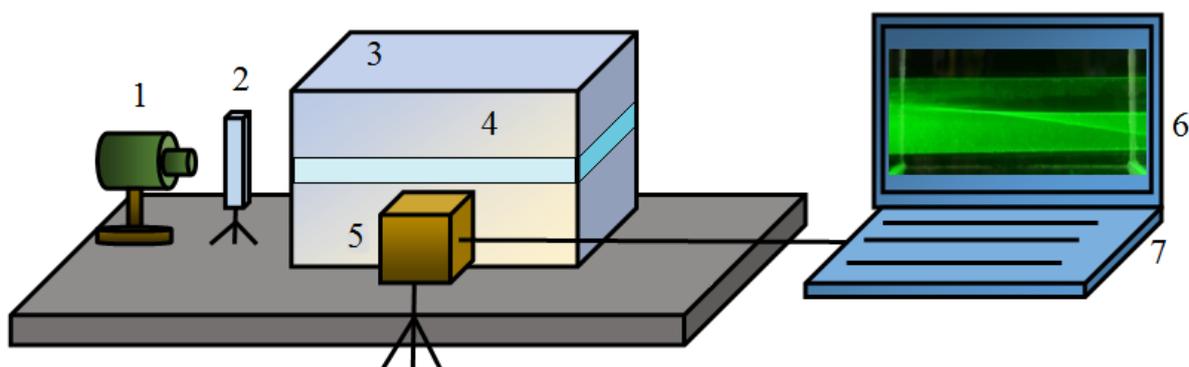


Рис. 4. Экспериментальная установка для регистрации каустик плоского лазерного пучка в диффузионном слое жидкости: 1 – лазер, 2 – оптическая система, 3 – кювета, 4 – диффузионный слой, 5 – цифровая фотокамера, 6 – 2D-рефрактограмма, 7 – ПК

Для создания диффузионного слоя использовалась дистиллированная вода и раствор NaCl. Для регистрации рефрактограммы в дистиллированную воду были добавлены рассеивающие частицы. Параметры среды: показатель преломления соленой воды  $n_1 = 1,3410$  и дистиллированной  $n_2 = 1,3310$ . Рефрактограмма, полученная в ходе эксперимента, представлена на рис. 5.

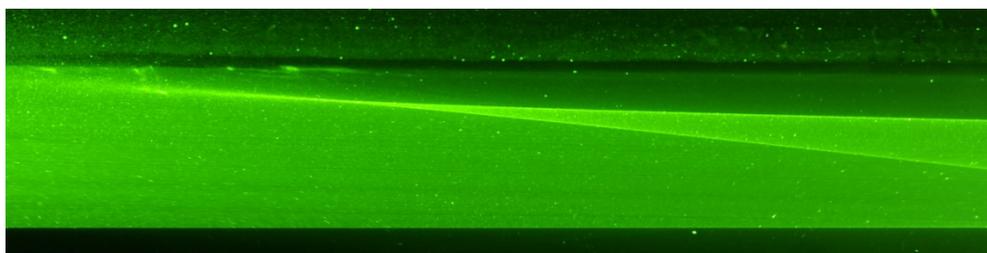


Рис.5. Экспериментальная регистрация каустик плоского лазерного пучка в диффузионном слое жидкости

Используя специально разработанный алгоритм обработки рефрактограмм, можно выделить две каустики. Распределение показателя преломления или значение величины  $h$  можно получить путем сравнения положения, формы каустик и координаты их слияния с теоретически рассчитанными. При данном подходе необходимо использовать параметрическую модель распределения показателя преломления. Регистрация рефрактограмм в различные моменты времени с равными промежутками позволяет оценить зависимость толщины слоя от времени. При практических измерениях погрешность собственно вычислительного алгоритма пренебрежимо мала и основной вклад будет вносить погрешность определения координаты слияния каустик. В связи с этим применимость алгоритма будет ограничена в непосредственной окрестности области слияния каустик и на больших дистанциях от неоднородности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе полученных в работе соотношений и экспериментальных данных можно утверждать, что при продольном зондировании стратифицированных сред структурированными пучками образующаяся при этом каустика в плоскости наблюдения отображается как огибающая локальных экстремумов, соответствующих максимальному отклонению лучей в структурных элементах пучка. Экспериментально визуализируемое положение экстремумов может быть использовано для определения геометрических параметров каустики без привлечения методов измерения интенсивности рефракционного поля. В свою очередь знание параметров каустики позволяет в ряде случаев восстанавливать физические характеристики среды, приводящие к неоднородности показателя преломления.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-08-00948а).

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Settles G.S.**, Schlieren and Shadowgraph Techniques, Visualizing Phenomena in Transparent Media, Springer, New York, 2001, P. 387.
2. **Дифракционная компьютерная оптика** / Под ред. В.А.Сойфера. М.: Физматлит, 2007. 736 с.
3. **Rinkevichyus B.S., Evtikhieva O.A., Raskovskaya I.L.**, Laser Refractography, Springer, New York, 2011, 189 p.
4. **Raskovskaya I.L., Rinkevichyus B.S.,Tolkachev A.V.**, Structured Beams in Laser Refractography Applications. In books: Laser Beams Theory, Properties and Applications. Nova Science Publishers. Inc., New York, 2011, P.399-414.
5. **Расковская И.Л., Сергеев Д.А., Ширинская Е.С.** Диагностика характеристик солестратифицированной жидкости методом лазерной рефрактографии // Измерительная техника. 2010. №10. С.36-38
6. **Born M., Wolf E.** Principles of optics. Cambridge University Press, 1999, 987 p.
7. **Vedyashkina A.V.**, Computer modeling of optical rays' refraction in inhomogeneous mediums, Journal of Beijing Institute of Technology, 2013, 22 (1), P. 71-76.
8. **Pazis D.N., Agioutantis Z., Kourkoulis S.K.**, The optical method of reflected caustics applied for a plate with a central hole: critical points and limitations, An international journal for experimental mechanics, 2011, 47(6), P. 489-498.
9. **Guiyun Gao, Zheng Li, Mehrdad Negehban**, Dynamic fracture analysis of polycarbonate by the optical method of caustics, Procedia materials science (2014), P. 165-176.
10. **Arnold V.I., Gusein-Zade S.M., Varchenko A.N.**, Singularities of Differentiable Maps. Volume I., Springer, New York, 2012, P. 393.
11. **Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.** Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
12. **Расковская И.Л.** // Журнал технической физики. 2015. Т.85. Вып.6. С.126-131.
13. **Raskovskaya I.L.**, Refractometry of optical inhomogeneous media by registration of caustics position with used of structured laser radiation, Avtometriya, 2014, 50(5), P. 92-98.
14. **Vedyashkina A.V., Pavlov I.N., Raskovskaya I.L., Rinkevichyus B.S.**, Experimental and computer 3D-visualization's dynamics of optical caustics in inhomogeneous mediums , Proceedings of 16 International Symposium on Flow Visualization, Okinawa, Japan, 2014, report ISFV16-1178.

I.L. Raskovskaya, A.V. Vedyashkina, E.V. Zelepukina

*National research university MPEI, Russia,  
111250, Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14, E-mail: [avedyashkina@rambler.ru](mailto:avedyashkina@rambler.ru)*

### DETERMINATION OF STRATIFIED MEDIA PARAMETERS BY CAUSTICS REGISTRATION AT REFRACTION OF STRUCTURED LASER RADIATION

*The conditions for the caustics emergence at the longitudinal optical sensing of stratified optically inhomogeneous media by structured laser beams which are visualized in a section as a family of geometric shapes. It was shown that in the observation plane at the exit of the medium*

*projection of caustic surface appears as the extremums' envelope of refractive displacement elements of the structure beam. This fact allows to experimentally determine the position of the caustic without registering intensity distribution in refractive image. Recorded geometric parameters of caustics are used to solve the inverse problem of refraction for reconstruction of the media physical characteristics, causing inhomogeneity of the refractive index. Experimental setup for pictures visualization of refraction of the structured laser radiation in the diffusion layer of the liquid is shown.*

STRATIFIED MEDIA, STRUCTURED LASER RADIATION, GEOMETRICAL OPTICS,  
CAUSTICS, INVERSE PROBLEMS OF REFRACTION, LASER REFRACTOGRAPHY