Двенадцатая Международная научно-техническая конференция
«Оптические методы исследования потоков»
Москва, 25 — 28 июня 2013 г.

УДК 535.36; 523.31; 519.6

В.П. Будак, О.В. Шагалов

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Россия,
111250, Москва, Красноказарменная ул., 14, E-mail: BudakVP@mpei.ru, ShagalovOV@gmail.com

КВАЗИДВУХПОТОКОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТОВ СВЕТОВЫХ ПОЛЕЙ В МУТНЫХ СРЕДАХ

АННОТАЦИЯ

С повышением точности современного измерительного оборудования стало возможным решать самую актуальную задачу оптического дистанционного зондирования (ОДЗ) – измерение малых газовых компонентов атмосферы, вносящих вклад в парниковый эффект. Существующие алгоритмы обработки спутниковых данных не удовлетворяют возможностям современных приборов ОДЗ - гиперспектральных систем по точности и скорости выполнения, а потому нуждаются в существенной модернизации. Особенностью предлагаемого решения является использование в работе метода широко известного в ядерной физике, но не применявшимся в задачах переноса излучения – метода синтетических итераций. В этом случае мы получаем существенный выигрыш в скорости за счет возможности использования простейшего метода решения уравнения переноса излучения вместо сложных ресурсоемких методов, а точность углового распределения не теряется за счет использования итерации.

МЕТОД СИНТЕТИЧЕСКИХ ИТЕРАЦИЙ, ДВУХПОТОКОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ, АНИЗОТРОПНОЕ РАССЕЯНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Одной из наиболее актуальных задач ОДЗ является задача определения газового состава атмосферы, в частности ее малых компонентов, вносящих вклад в парниковый эффект. Согласно исследованиям для получения полной картины глобального распределения углекислого газа необходимы данные о его стоках и истоках количестве точек по всей планете. Такие исследования возможны только с использованием спутниковых систем. Определение параметров среды по прошедшему ее излучению является косвенной задачей, поэтому важнейший этап ее решения – разработка математической модели переноса излучения в атмосфере. Это требует решения интегро-дифференциального уравнения переноса излучения (УПИ). Создаваемые алгоритмы должны разрабатываться с учетом требований самых передовых приборов ОДЗ – гиперспектральных систем, проводящих измерения на огромном количестве длин волн. А такие требования на сегодняшний день являются очень высокими: об эффективности алгоритма можно говорить, если на вычисления для одной длины волны тратится не более одной секунды, при этом точность расчета должна быть не хуже одного процента. Существующие алгоритмы являются неэффективными с точки зрения гиперспектральных систем, а потому нуждаются в глубокой модернизации.

В работе рассмотрены возможности нового метода решения УПИ для плоского слоя мутной среды на основе синтетических итераций. Суть метода заключается в сочетании приближенного решения УПИ с одной или несколькими последующими итерациями. В качестве приближенного метода решения в работе предложено использовать квазидвухпотоковое приближение, основанное на выделении из решения анизотропной части на основе малоугловой модификации метода сферических гармоник [1] и решении соответствующего уравнения в двухпотоковом приближении (метод Шварцильда-Шустера).

ПРИБЛИЖЕННАЯ ЧАСТЬ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим краевую задачу УПИ для плоского слоя неизлучающей мутной среды глубиной τ_0, облучаемого плоским мононаправленным источником с единичной яркостью под углом θ_0:

$$\begin{cases} \mu \dfrac{\partial L(\tau,\mu)}{\partial \tau} = -L(\tau,\mu) + \dfrac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) L(\tau,\mu') d\hat{\mathbf{l}}', \\ L(\tau,\mu)\big|_{\tau=0,\mu>0} = \delta(\hat{\mathbf{l}} - \hat{\mathbf{l}}_0), L(\tau,\mu)\big|_{\tau=\tau_0,\mu<0} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $L(\tau,\mu)$ – яркость светового поля на оптической глубине τ по направлению, определяемому $\mu=cos\theta$ (θ – зенитный угол), Λ - альбедо однократного рассеяния, $x(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}})$ - индикатриса рассеяния.

Физической основой теории переноса излучения является лучевое приближение, неизбежно порождающее пространственно-угловые особенности, которые не могут быть представлены численно. Для решения этой проблемы был предложен подход, намеченный А. Эддингтоном, развитый Э. Милном и получившим завершение в работах С. Чандрасекара. Суть его заключается в представлении общего решения в виде суммы анизотропной части, содержащей особенность и вычисляемой аналитически, и регулярной добавки, которая может быть представлена с помощью того или иного численного метода [2]:

$$L(\tau,\mu) = L_a(\tau,\mu) + \tilde{L}(\tau,\mu). \tag{2}$$

Указанный подход стал классическим, и все существующие на сегодняшний день решения, являются этапами его развития.

В качестве метода выделения анизотропной части решения лучше всего зарекомендовала себя малоугловая модификация метода сферических гармоник (МСГ). В этом случае тело яркости представляется в виде ряда по сферическим функциям, и используется свойство медленного монотонного убывания углового спектра быстро изменяющейся по углу функции. В нашей данной работе в качестве анизотропной части для простоты изложения ограничимся выделением только прямой не рассеянной составляющей, однако отметим, что на суть предлагаемого метода это никак не влияет, и ведет к изменению только выражения для функции источников.

Перейдем к приближенному решению УПИ – двухпотоковому методу. Для этого подставим в краевую задачу УПИ (1) общее решение, представленное в виде суммы (2), выделив в анизотропную часть только прямое не рассеянное излучение L_0:

$$\mu \frac{\partial \{L_0(\tau,\mu) + \tilde{L}(\tau,\mu)\}}{\partial \tau} + L_0(\tau,\mu) + \tilde{L}(\tau,\mu) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') \{L_0(\tau,\mu') + \tilde{L}(\tau,\mu')\} d\hat{\mathbf{l}}'. \tag{3}$$

Преобразуем уравнение (3) таким образом, чтобы выделить функцию источников и получить УПИ для гладкой части решения

$$\mu \frac{\partial \tilde{L}(\tau,\mu)}{\partial \tau} + \tilde{L}(\tau,\mu) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{l}}',\hat{\mathbf{l}}) \tilde{L}(\tau,\mu') d\hat{\mathbf{l}}' + Q(\tau,\mu,\mu'), \tag{4}$$

где

$$Q(\tau,\mu,\mu') = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}') L_0(\tau,\mu') d\hat{\mathbf{l}}' - \mu \frac{\partial L_0(\tau,\mu)}{\partial \tau} - L_0(\tau,\mu) \tag{5}$$

и есть функция источников.

Преобразуем отдельно функцию источников (5). Прямое излучение по определению удовлетворяет УПИ без рассеяния

$$\mu \frac{\partial L_0(\tau,\mu)}{\partial \tau} + L_0(\tau,\mu) = 0, \tag{6}$$

решение которого имеет вид

$$L_0(\tau,\mu) = \delta(\hat{\mathbf{l}} - \hat{\mathbf{l}}_0) e^{-\tau/\mu_0}, \tag{7}$$

где $\mu_0 = cos\theta_0$.

Подставив найденное выражение в (5), получим окончательный вид функции источников

$$Q(\tau,\mu,\mu') = \frac{\Lambda}{4\pi} x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}_0) e^{-\tau/\mu_0}. \tag{8}$$

С учетом этого уравнение для гладкой части решения примет вид

$$\mu \frac{\partial \tilde{L}(\tau,\mu)}{\partial \tau} + \tilde{L}(\tau,\mu) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{l}}',\hat{\mathbf{l}}) \tilde{L}(\tau,\mu') d\hat{\mathbf{l}}' + \frac{\Lambda}{4\pi} x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}_0) e^{-\tau/\mu_0}. \tag{9}$$

Двухпотоковое приближение (метод Шварцильда-Шустера) заключается в усреднении поля излучения по двум полусферам направлений в пространстве, в результате чего получатся два обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнения для полупространственных облученностей. Для этого проинтегрируем последнее уравнение по верхней и нижней полусфере

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega_-} \mu \frac{\partial \tilde{L}(\tau,\mu)}{\partial \tau} d\hat{\mathbf{l}} + \int\limits_{\Omega_-} \tilde{L}(\tau,\mu) d\hat{\mathbf{l}} = \frac{\Lambda}{4\pi} \int\limits_{\Omega_-} \oint x(\hat{\mathbf{l}}',\hat{\mathbf{l}}) \tilde{L}(\tau,\mu') d\hat{\mathbf{l}}' d\hat{\mathbf{l}} + \frac{\Lambda}{4\pi} e^{-\tau/\mu_0} \int\limits_{\Omega_-} x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}_0) d\hat{\mathbf{l}}, \\ \int\limits_{\Omega_+} \mu \frac{\partial \tilde{L}(\tau,\mu)}{\partial \tau} d\hat{\mathbf{l}} + \int\limits_{\Omega_+} \tilde{L}(\tau,\mu) d\hat{\mathbf{l}} = \frac{\Lambda}{4\pi} \int\limits_{\Omega_+} \oint x(\hat{\mathbf{l}}',\hat{\mathbf{l}}) \tilde{L}(\tau,\mu') d\hat{\mathbf{l}}' d\hat{\mathbf{l}} + \frac{\Lambda}{4\pi} e^{-\tau/\mu_0} \int\limits_{\Omega_+} x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}_0) d\hat{\mathbf{l}}, \end{cases} \tag{10}$$

где Ω_+ и Ω_- означают нижнюю и верхнюю полусферы соответственно.

Рассмотрим первое уравнение системы (10) и проинтегрируем каждый его член отдельно:

$$\int\limits_{\Omega_-} \mu \frac{\partial \tilde{L}(\tau,\mu)}{\partial \tau} d\hat{\mathbf{l}} = \mu_\uparrow \frac{d\tilde{E}_\uparrow(\tau)}{d\tau}; \tag{11}$$

$$\int_{\Omega_-} \tilde{L}(\tau,\mu)d\hat{\mathbf{l}} = \tilde{E}_{\uparrow}(\tau); \tag{12}$$

$$\frac{\Lambda}{4\pi}\int_{\Omega_-}[\,]x(\hat{\mathbf{l}}',\hat{\mathbf{l}})\tilde{L}(\tau,\mu')d\hat{\mathbf{l}}'d\hat{\mathbf{l}} = \frac{\Lambda}{4\pi}\left[\int_{\Omega_-}\int_{\Omega_-} x(\hat{\mathbf{l}}',\hat{\mathbf{l}})\tilde{L}(\tau,\mu')d\hat{\mathbf{l}}'d\hat{\mathbf{l}} + \int_{\Omega_-}\int_{\Omega_+} x(\hat{\mathbf{l}}',\hat{\mathbf{l}})\tilde{L}(\tau,\mu')d\hat{\mathbf{l}}'d\hat{\mathbf{l}}\right] =$$
$$= \Lambda\beta_c\tilde{E}_{\uparrow}(\tau) + \Lambda\beta_o\tilde{E}_{\downarrow}(\tau), \tag{13}$$

где $\tilde{E}_{\uparrow}(\tau)$ - пространственная облученность отраженного излучения в зависимости от глубины слоя; $\mu_{\uparrow}$ - средний косинус тела яркости в верхнюю полусферу; β_c и β_o – коэффициенты рассеяния, совпадающий и противоположный направлению излучения, соответственно;

$$\frac{\Lambda}{4\pi}e^{-\tau/\mu_0}\int_{\Omega_-} x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}_0)d\hat{\mathbf{l}} = \Lambda\beta_{o0}e^{-\tau/\mu_0}; \tag{14}$$

где β_{o0} – коэффициент рассеяния падающего излучения. С учетом этого первое уравнение системы (10) принимает вид

$$\mu_{\uparrow}\frac{\partial\tilde{E}_{\uparrow}(\tau)}{\partial\tau} + \tilde{E}_{\uparrow}(\tau) = \Lambda\beta_c\tilde{E}_{\uparrow}(\tau) + \Lambda\beta_o\tilde{E}_{\downarrow}(\tau) + \Lambda\beta_{o0}e^{-\tau/\mu_0}. \tag{15}$$

Особенностью двухпотокового приближения является полная симметрия, поскольку усреднение происходит по полупространствам. В связи с этим второе уравнение системы мы можем получить заменой индексов «вверх-вниз» на противоположные. При этом система (10) будет иметь вид

$$\begin{cases} \mu_{\downarrow}\dfrac{d\tilde{E}_{\downarrow}(\tau)}{d\tau} = (\Lambda\beta_c - 1)\tilde{E}_{\downarrow}(\tau) + \Lambda\beta_o\tilde{E}_{\uparrow}(\tau) + \Lambda\beta_{c0}e^{-\tau/\mu_0}, \\ \mu_{\uparrow}\dfrac{d\tilde{E}_{\uparrow}(\tau)}{d\tau} = (\Lambda\beta_c - 1)\tilde{E}_{\uparrow}(\tau) + \Lambda\beta_o\tilde{E}_{\downarrow}(\tau) + \Lambda\beta_{o0}e^{-\tau/\mu_0}, \end{cases} \tag{16}$$

или то же самое в матричной форме [3]:

$$\vec{\mathrm{M}}\frac{d\,\tilde{\mathrm{E}}(\tau)}{d\tau} = -\vec{\mathrm{A}}\,\tilde{\mathrm{E}}(\tau) + \Lambda e^{-\tau/\mu_0}\,\vec{\mathrm{F}}, \tag{17}$$

где $\vec{\mathrm{M}} = diag(\mu_{\downarrow},\mu_{\uparrow})$, $\vec{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 1-\Lambda\beta_c & -\Lambda\beta_o \\ -\Lambda\beta_o & 1-\Lambda\beta_c \end{bmatrix} \equiv \vec{1} - \Lambda\begin{bmatrix} \beta_c & \beta_o \\ \beta_o & \beta_c \end{bmatrix}$ и $\vec{\mathrm{F}} = \begin{bmatrix} \beta_{c0} \\ \beta_{o0} \end{bmatrix}$. Отметим еще раз, что в матричной форме, при выделении анизотропной части по МСГ изменится вид только функции источников (то есть только вектор $\vec{\mathrm{F}}$), а значит, общий вид решения сохранится.

Для решения системы уравнений (17) воспользуемся методом вариации произвольной постоянной. Решение соответствующего однородного уравнения имеет вид:

$$\tilde{\mathrm{E}}(\tau) = \exp(-\vec{\mathrm{B}}\tau)\cdot\vec{\mathrm{C}}, \tag{18}$$

где $\vec{\mathrm{B}} = \vec{\mathrm{M}}^{-1}\vec{\mathrm{A}}$, $\vec{\mathrm{C}}$ - константа интегрирования.

Представим константу в виде функции, зависящей от τ, тогда

$$\tilde{\mathrm{E}}(\tau) = \exp(-\vec{\vec{\mathrm{B}}}\tau)\begin{bmatrix}\tilde{E}_{0\downarrow}(\tau)\\ \tilde{E}_{0\uparrow}(\tau)\end{bmatrix} = \exp(-\vec{\vec{\mathrm{B}}}\tau)\,\tilde{\mathrm{E}}_0(\tau). \tag{19}$$

Подставим это выражение в матричное уравнение (17), в результате чего оно примет вид

$$\frac{d\,\tilde{\mathrm{E}}_0(\tau)}{d\tau} = \Lambda e^{-\tau/\mu_0}\exp(\vec{\vec{\mathrm{B}}}\tau)\,\vec{\vec{\mathrm{M}}}^{-1}\,\vec{\mathrm{F}}. \tag{20}$$

Уравнения системы (20) являются уравнениями с разделяющимися переменами, а потому решение системы будет иметь вид

$$\tilde{\mathrm{E}}_0(\tau) - \tilde{\mathrm{E}}_0(0) = \Lambda\int_0^{\tau} \mathrm{e}^{(-\vec{\vec{1}}+\vec{\vec{\mathrm{B}}}\mu_0)t/\mu_0}\,d\tau\,\vec{\vec{\mathrm{M}}}^{-1}\,\vec{\mathrm{F}} \tag{21}$$

Где

$$\int_0^{\tau} \mathrm{e}^{(-\vec{\vec{1}}+\vec{\vec{\mathrm{B}}}\mu_0)t/\mu_0}\,d\tau = \mu_0(-\vec{\vec{1}} + \mu_0\,\vec{\vec{\mathrm{B}}})^{-1}(\mathrm{e}^{(\mu_0\vec{\vec{\mathrm{B}}}-\vec{\vec{1}})\tau/\mu_0} - \vec{\vec{1}}) = \mu_0(\vec{\vec{1}} - \mu_0\,\vec{\vec{\mathrm{B}}})^{-1}(\vec{\vec{1}} - \mathrm{e}^{-\tau/\mu_0}\,\mathrm{e}^{\vec{\vec{\mathrm{B}}}\tau})\,. \tag{22}$$

С учетом этого

$$\tilde{\mathrm{E}}_0(\tau) = \tilde{\mathrm{E}}_0(0) + \Lambda\mu_0(\vec{\vec{1}} - \mu_0\,\vec{\vec{\mathrm{B}}})^{-1}(\vec{\vec{1}} - \mathrm{e}^{-\tau/\mu_0}\,\mathrm{e}^{\vec{\vec{\mathrm{B}}}\tau})\,\vec{\vec{\mathrm{M}}}^{-1}\,\vec{\mathrm{F}}. \tag{23}$$

Умножая полученное решение на решение соответствующего однородного, получим полное решение:

$$\tilde{\mathrm{E}}(\tau) = e^{-\vec{\vec{\mathrm{B}}}\tau}\,\tilde{\mathrm{E}}_0(0) + \Lambda\mu_0 e^{-\vec{\vec{\mathrm{B}}}\tau}(\vec{\vec{1}} - \mu_0\,\vec{\vec{\mathrm{B}}})^{-1}(\vec{\vec{1}} - \mathrm{e}^{-\tau/\mu_0}\,\mathrm{e}^{\vec{\vec{\mathrm{B}}}\tau})\,\vec{\vec{\mathrm{M}}}^{-1}\,\vec{\mathrm{F}}. \tag{24}$$

Неизвестные константы найдем, подставив в последнее уравнение известные граничные условия

$$\tilde{E}_{\downarrow}(0) = 0, \tilde{E}_{\uparrow}(\tau_0) = 0. \tag{25}$$

Представив матричную экспоненту через собственные векторы и собственные значения матрицы $\vec{\vec{\mathrm{B}}}$:

$$\exp\left(-\vec{\vec{\mathrm{B}}}\tau_0\right) = \vec{\vec{\mathrm{U}}}\,e^{-\vec{\vec{\Gamma}}\tau_0}\,\vec{\vec{\mathrm{U}}}^{-1}, \tag{26}$$

и произведя матричное умножение, получим выражение для неизвестных граничных условий

$$\begin{bmatrix}\tilde{E}_{\downarrow}(\tau_0)\\ \tilde{E}_{\uparrow}(0)\end{bmatrix} = \Lambda\mu_0\begin{bmatrix} e^{\lambda_1\tau_0}u_{11} & -u_{12}\\ e^{\lambda_2\tau_0}u_{21} & -u_{22}\end{bmatrix}^{-1}\vec{\vec{\mathrm{U}}}^{-1}(\vec{\vec{1}} - \mu_0\,\vec{\vec{\mathrm{B}}})^{-1}\left(\vec{\vec{1}} - \mathrm{e}^{-\tau_0/\mu_0}\,\mathrm{e}^{\vec{\vec{\mathrm{B}}}\tau_0}\right)\vec{\vec{\mathrm{M}}}^{-1}\,\vec{\mathrm{F}}. \tag{27}$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛЯ В СРЕДЕ

Для взятия итерации необходимо найти поле в среде, для того чтобы можно было оценить интеграл рассеяния в (9). Для этого вновь обратимся к системе. Имеем пару граничных условий:

$$\tilde{\mathrm{E}}(0)=\begin{bmatrix}0\\ \tilde{E}_{\uparrow}(0)\end{bmatrix} \text{ и } \tilde{\mathrm{E}}(\tau_0)=\begin{bmatrix}\tilde{E}_{\downarrow}(\tau_0)\\ 0\end{bmatrix},$$

что дает нам возможность решить УПИ двумя способами – «сверху» и «снизу» [4]:

$$\tilde{\mathrm{E}}(\tau)=e^{-\ddot{\mathrm{B}}\tau}\,\tilde{\mathrm{E}}(0)+\Lambda e^{-\ddot{\mathrm{B}}\tau}\int_0^{\tau} \mathrm{e}^{(\ddot{\mathrm{B}}\mu_0-\ddot{1})t/\mu_0}\,d\tau\,\ddot{\mathrm{M}}^{-1}\,\vec{\mathrm{F}}; \tag{28}$$

$$\tilde{\mathrm{E}}(\tau)=e^{\ddot{\mathrm{B}}(\tau_0-\tau)}\,\tilde{\mathrm{E}}(\tau_0)-\Lambda e^{-\ddot{\mathrm{B}}\tau}\int_{\tau}^{\tau_0} \mathrm{e}^{(\ddot{\mathrm{B}}\mu_0-\ddot{1})t/\mu_0}\,d\tau\,\ddot{\mathrm{M}}^{-1}\,\vec{\mathrm{F}}, \tag{29}$$

где $\tilde{\mathrm{E}}(\tau)\equiv\begin{bmatrix}\tilde{E}_{\downarrow}(\tau)\\ \tilde{E}_{\uparrow}(\tau)\end{bmatrix}$.

Вычислив интегралы, получим

$$\tilde{\mathrm{E}}(\tau)=e^{-\ddot{\mathrm{B}}\tau}\,\tilde{\mathrm{E}}(0)+\Lambda\mu_0\,\mathrm{e}^{-\ddot{\mathrm{B}}\tau}(\ddot{1}-\mu_0\,\ddot{\mathrm{B}})^{-1}\left(\ddot{1}-\mathrm{e}^{-\tau/\mu_0}\,\mathrm{e}^{\ddot{\mathrm{B}}\tau}\right)\ddot{\mathrm{M}}^{-1}\,\vec{\mathrm{F}} \text{ и} \tag{30}$$

$$\tilde{\mathrm{E}}(\tau)=e^{\ddot{\mathrm{B}}(\tau_0-\tau)}\,\tilde{\mathrm{E}}(\tau_0)-\Lambda\mu_0\,\mathrm{e}^{-\ddot{\mathrm{B}}\tau}(\ddot{1}-\mu_0\,\ddot{\mathrm{B}})^{-1}\left(\mathrm{e}^{-\tau/\mu_0}\,\mathrm{e}^{\ddot{\mathrm{B}}\tau}-\mathrm{e}^{-\tau_0/\mu_0}\,\mathrm{e}^{\ddot{\mathrm{B}}\tau_0}\right)\ddot{\mathrm{M}}^{-1}\,\vec{\mathrm{F}}. \tag{31}$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИТЕРАЦИИ

При использовании двухпотокового метода, интегрирование члена УПИ, отвечающего за рассеяние, приводит его к следующему виду

$$\frac{\Lambda}{4\pi}\int_{\Omega_-}\oint x(\hat{\mathbf{l}}',\hat{\mathbf{l}})\tilde{L}(\tau,\mu')d\hat{\mathbf{l}}'d\hat{\mathbf{l}}=\Lambda\beta_c\tilde{E}_{\uparrow}(\tau)+\Lambda\beta_o\tilde{E}_{\downarrow}(\tau), \tag{32}$$

что позволяет избавиться от интеграла рассеяния в уравнении (9) и решать его, как ОНДУ. Выражение для нижней полусферы направлений получается заменой индексов в (32) на противоположные вследствие полной симметрии двухпотокового метода.

Введем обозначение

$$\vec{\mathrm{W}}(\tau)\equiv\begin{bmatrix}\mathrm{W}_{\downarrow}(\tau)\\ \mathrm{W}_{\uparrow}(\tau)\end{bmatrix}=\Lambda\begin{bmatrix}\beta_o\tilde{E}_{\uparrow}(\tau)+\beta_c\tilde{E}_{\downarrow}(\tau)\\ \beta_o\tilde{E}_{\downarrow}(\tau)+\beta_c\tilde{E}_{\uparrow}(\tau)\end{bmatrix}. \tag{33}$$

С учетом этого уравнение (9) можно переписать в виде

$$\mu\frac{\partial\,\tilde{\vec{\mathrm{L}}}(\tau,\mu)}{\partial\tau}+\tilde{\vec{\mathrm{L}}}(\tau,\mu)=\vec{\mathrm{W}}(\tau)+\frac{\Lambda}{4\pi}x(\hat{\mathbf{l}}_0,\hat{\mathbf{l}})\,\mathrm{e}^{-\tau/\mu_0}, \tag{34}$$

где

$$\tilde{\tilde{\mathrm{L}}}(\tau,\mu) \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\mathrm{L}}}_{\downarrow}(\tau,\mu) \\ \tilde{\tilde{\mathrm{L}}}_{\uparrow}(\tau,\mu) \end{bmatrix}, \tag{35}$$

что представляет из себя два набора дискретных значений яркости в нижнюю и в верхнюю полусферы соответственно.

Для решения уравнения (34) еще раз воспользуемся методом вариации произвольной постоянной, и, используя граничные условия

$$L(0,\mu)\big|_{\mu>0} = 0,\ \ L(\tau_0,\mu)\big|_{\mu<0} = 0, \tag{36}$$

получим яркость первой итерации от гладкой части решения

$$\tilde{L}(\tau_0,\mu)\big|_{\mu>0} = \frac{\mathrm{e}^{-\tau_0/\mu}}{\mu}\int_0^{\tau_0} \mathrm{e}^{\tau/\mu}\left[W_{\downarrow}(\tau) + \frac{\Lambda}{4\pi}x(\hat{\mathbf{l}}_0,\hat{\mathbf{l}})\,\mathrm{e}^{-\tau/\mu_0}\right]d\tau, \tag{37}$$

$$\tilde{L}(0,\mu)\big|_{\mu<0} = -\frac{1}{\mu}\int_0^{\tau_0} \mathrm{e}^{\tau/\mu}\left[W_{\uparrow}(\tau) + \frac{\Lambda}{4\pi}x(\hat{\mathbf{l}}_0,\hat{\mathbf{l}})\,\mathrm{e}^{-\tau/\mu_0}\right]d\tau. \tag{38}$$

При использовании МСГ для выделения анизотропной части решения в последних двух выражениях меняется только вид второго слагаемого в квадратных скобках.

Было проведено сравнения программной реализации по предложенному методу с программой MDOM, созданной на кафедре светотехники МЭИ. Эта программа использует метод дискретных ординат для нахождения гладкой части решения, а потому является, по сути, точным решением УПИ. Однако при этом на вычисление с точностью в один процент ей требуется около тридцати минут, что расходится с требованиями гиперспектральных систем больше, чем на три порядка.

Результаты сравнения для прошедшего и отраженного от слоя излучения представлены соответственно на рис. 1 и рис. 2. При этом использовались следующие параметры: оптическая глубина $\tau_0=1$, угол падения $\theta_0=45^o$, альбедо однократного рассеяния $\Lambda=0.8$, параметр индикатрисы Хеньи-Гринстейна $g=0.99$.

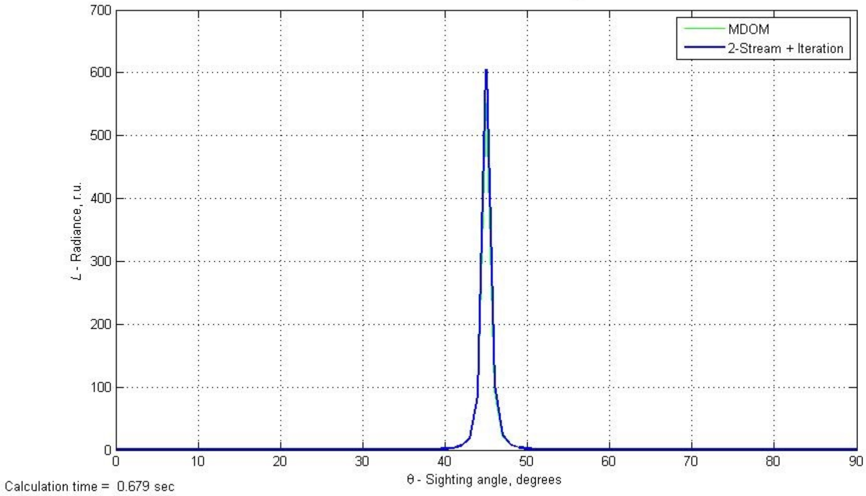

Рис. 1. Сравнение по прошедшему излучению.

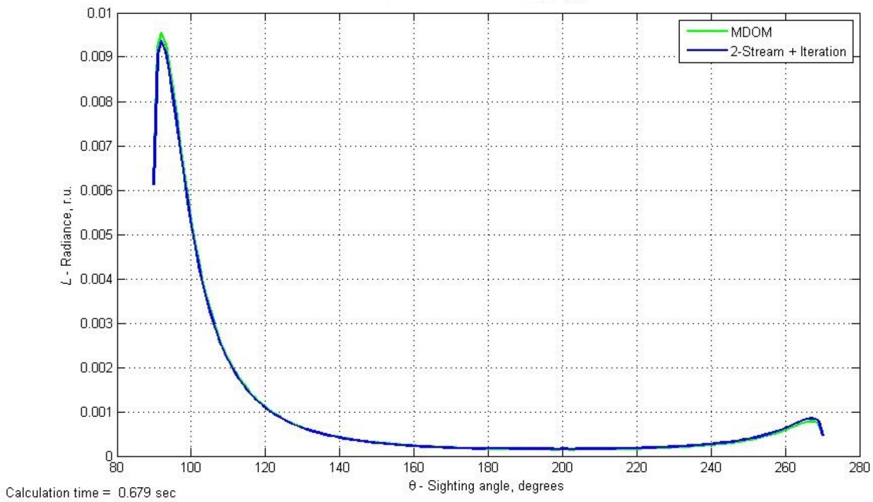

Рис. 2. Сравнение по отраженному излучению.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование малоугловой модификации метода сферических гармоник является наилучшим методом выделения анизотропной части решения УПИ. Использование МСГ позволяет получить регулярную часть решения гладкой, практически изотропной по углу функцией. А это значит, что для ее вычисления можно воспользоваться простейшим методом решения УПИ (например, двухпотоковым приближением) для учета энергетики, а для уточнения углового распределения использовать итерацию – «квазидвухпотоковое приближение».

Результаты сравнения с точным решением подтверждают предположения об эффективности метода, а это в свою очередь открывает путь к решению таких задач, как трехмерный перенос излучения, сумеречное зондирование, когда за одно измерение можно получить информацию о слое огромной толщины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Budak V.P., Klyuykov D.A., Korkin S.V.** Convergence acceleration of radiative transfer equation solution at strongly anisotropic scattering // In Light Scattering Reviews 5: Single Light Scattering and Radiative Transfer / Ed. A.A. Kokhanovsky. - Springer Praxis Books, 2010. P.147-204.
2. **Будак В.П., Ефременко Д.С., Шагалов О.В.** Сравнительный анализ алгоритмов решения векторного уравнения переноса излучения по эффективности для плоского слоя мутной среды // Оптика атмосферы и океана, 2011. Т.24, № 12. С.1088-1098.
3. **Budak V.P., Efremenko D.S., Shagalov O.V.** Efficiency of algorithm for solution of vector radiative transfer equation in turbid medium slab // Journal of physics: conference series, 2012. V.369. P.012021-10.
4. **Будак В.П., Ефременко Д.С., Шагалов О.В.** Математическое моделирование сигналов оптико-электронной системы дистанционного зондирования из космоса при наличии разорванной облачности // Известия ВУЗов. Физика, 2012. Т.55, №9/2. С.148-149.

V.P. Budak, O.V. Shagalov

National Research University «Moscow Power Engineering Institute», Russia
111250, Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14, E-mail: BudakVP@mpei.ru,ShagalovOV@gmail.com

QUASI TWO-STREAM APPROXIMATION IN THE SOLUTION OF THE RADIATIVE TRANSFER EQUATION FOR THE CALCULATION OF THE LIGHT FIELDS IN TURBID MEDIA

The increase of the precision of modern measuring equipment allows to solve the most actual task of optical remote sensing (ORS) - measurement of gas components of the atmosphere that contribute to the greenhouse effect. Existing algorithms for processing satellite data do not meet the capabilities of modern devices ORS - - hyperspectral systems - in terms of accuracy and speed of the calculation, and therefore they need significant modernization. Feature of the proposed solutions is using a method that is well-known in the nuclear physics, but doesn't apply in the radiative transfer problems – method of the synthetic iterations. In this case we have a significant gain in speed due to the possibility of using a simple method of the radiative transfer equation solving instead of complex resource-intensive methods, and the accuracy of the angular distribution is not lost due to the use of iteration.

SYNTHETIC ITERATIONS METHOD, TWO-STREAM APPROXIMATION, ANISOTROPIC SCATTERING