

УДК 517.443:534.01

Г.С. Ханян

*Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, Россия  
111116, Москва, Авиамоторная ул., 2. E-mail: dep007@rtc.ciam.ru*

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕКРЕМЕНТА ЗАТУХАНИЯ КОЛЕБАНИЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УСЕЧЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ**

### **АННОТАЦИЯ**

Предлагается метод параметрического оценивания декремента затухающих гармонических колебаний, основанный на вычислении разности фаз на несущей частоте прямого и обращенного во времени процесса колебаний. Путем пошагового усечения дискретного преобразования Фурье цифровой реализации процесса строится характеристика, наклон которой оказывается зависящим от декремента. Проводятся численные эксперименты по математическому моделированию и спектральному анализу затухающих колебаний для подтверждения метода и определения границ его применимости.

**ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ, ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ, РАЗНОСТЬ ФАЗ, ОЦЕНКА ДЕКРЕМЕНТА, ПОГРЕШНОСТИ**

### **ВВЕДЕНИЕ**

Затухающие по экспоненциальному закону колебания в волновой оптике возникают, например, при полном внутреннем отражении света (в среде с меньшим показателем преломления) и при дифракции света на дифракционной решетке, шаг которой меньше длины волны света [1]. Так же, как и в других областях экспериментальной физики, включая для ставших хрестоматийными, но не потерявших актуальность механических систем с линейным трением (лопатки рабочих колес авиадвигателей) и электрических цепей с активным сопротивлением (современные системы на кристалле), измерение декремента колебаний является одной из важных задач цифровой обработки сигналов [2-3] – при наличии различных подходов, конкурирующих как по скорости, так и по точности вычислений [4-5].

Предлагаемый в настоящей работе метод определения декремента затухания является очередным в семействе методов оценки параметров модулированного гармонического сигнала, использующим в качестве измеряемой величины разность фаз на несущей частоте между отличающимися во времени протекания двумя цифровыми реализациями сигнала.

Предыдущие работы были посвящены оценке глубины амплитудной модуляции ЛДА-сигнала [6-7] и скорости изменения частоты ЛЧМ-сигнала [8]. Общим для таких методов является пошаговая вычислительная процедура, строящая характеристику, имеющую вид прямой линии, наклон которой отчетливо связан с оцениваемым параметром модуляции колебаний. Характеристика строится по результатам ДПФ усекаемой на каждом шаге на один отсчет исходной цифровой реализации. Различие состоит лишь в функциональной зависимости итоговой градуировочной кривой от своего аргумента

(различными оказываются коэффициенты аппроксимирующего полинома, степень которого не выше трех).

Следует отметить, что столь универсальная для способов модуляции методология, будучи основанной на строгом теоретическом анализе свойств преобразования Фурье чистого гармонического сигнала [9], установлена, все же, эмпирическим путем. Однако это обстоятельство лишь подчеркивает наличие «скрытых резервов» в информации, получаемой измерением фазы. Данная работа, помимо решения практической измеренческой задачи, имеет целью продемонстрировать эту неочевидную сторону спектрального фурье-анализа.

## ПАРАМЕТРЫ ЗАТУХАЮЩЕГО ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА

Рассматривается аналоговый, затухающий по экспоненте гармонический сигнал

$$s(t) = ae^{-\gamma t} \cos(2\pi ft + \varphi); \quad 0 \leq t < T \quad (1)$$

с максимальной амплитудой  $a$ , несущей частотой  $f$ , начальной фазой  $\varphi$  и коэффициентом затухания  $\gamma$ . Параметр  $\gamma$ , отнесенный к частоте  $f$ , в общей теории колебаний принято называть логарифмическим декрементом затухания  $\delta = \gamma / f$ .

В спектральном фурье-анализе ограниченных во времени (финитных) сигналов, в стремлении к «автомодельности» получаемых соотношений, удобно обезразмеривать параметры, имеющие размерность частоты, путем умножения их на время наблюдения сигнала – длительность реализации  $T$ . Поэтому в дальнейшем изложении будем иметь дело с безразмерной частотой сигнала

$$fT = m + \mu; \quad m = 1, 2, \dots; \quad 0 \leq \mu < 1, \quad (2)$$

разложенной на сумму целого числа (бина)  $m$  и правильной дроби  $\mu$ . Обезразмеренный таким же образом коэффициент затухания

$$\alpha = \gamma T = \delta fT = (m + \mu)\delta \quad (3)$$

будем условно называть параметром затухания.

Вычислять несущую частоту  $f$  будем с погрешностью до спектрального разрешения, т.е. как  $f \approx m/T$ . В то же время, именно пренебрегаемый здесь параметр  $\mu$ , является, согласно основной идее метода, исходной измеряемой величиной, определяющей параметр затухания  $\alpha$ , и, в конечном счете, логарифмический декремент  $\delta \approx \alpha/m$ .

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА МЕТОДА

Основная идея метода заключается в использовании фазовых соотношений между  $N$ -точечной цифровой реализацией

$$s_n = s(t_n) = ae^{-an/N} \cos(2\pi(m + \mu)n/N + \varphi); \quad t_n = n/F; \quad n = 0, 1, \dots, N-1; \quad N = TF \quad (4)$$

процесса колебаний (1), полученной с частотой дискретизации  $F$ , и ее транспонированным (зеркально-обращенным) отображением

$$s'_n = -s_{N-1-n}; \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5)$$

По результатам взаимного дискретного спектрального анализа цифровых реализаций (4) и (5) в ходе пошагового вычислительного процесса строится характеристика, наклон линии регрессии которой служит для определения параметра затухания  $\alpha$ .

Запрограммированная последовательность действий на  $k$ -м шаге состоит в следующем.

- а) Дискретные преобразования Фурье усеченных до  $N_k=N-k$  отсчетов реализаций пары:

$$S_{j,k} = \frac{1}{N_k} \sum_{n=0}^{N_k-1} s_n e^{-i2\pi jn/N_k}, \quad S'_{j,k} = \frac{1}{N_k} \sum_{n=0}^{N_k-1} s'_n e^{-i2\pi jn/N_k}; \quad j = 1, 2, \dots, M; \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где  $M_k = [N_k/2]$  – дискретная длина спектра (здесь и далее квадратные скобки означают целую часть заключенного в них выражения).

- б) Вычисление взаимного спектра амплитуд и спектра разности фаз реализаций:

$$A_{j,k} = 2\sqrt{|S_{j,k}| \times |S'_{j,k}|}; \quad \Phi_{j,k} = \arg S_{j,k} - \arg S'_{j,k}; \quad j = 1, 2, \dots, M_k. \quad (7)$$

- в) Поиск максимума во взаимном спектре амплитуд:

$$A_{m,k} = \max_{j=1, \dots, m, \dots, M_k} A_{j,k}. \quad (8)$$

- г) Использование фазы  $\Phi_{m,k}$  на адресе  $m$  максимума (8) для построения характеристики

$$f_k T = m + \mu; \quad \mu = \frac{\Phi_{m,k}}{\pi} \frac{N_0}{[N_0^2 / N_k]}, \quad (9)$$

служащей в дальнейшем для оценки параметра  $\alpha$ .

## СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛА

На рис. 1 приведены результаты проводимого по формулам (4)-(9) спектрального анализа. В окнах 'Signal(+)' и 'Signal(-)' нарисованы осциллограммы реализаций (4) и (5), соответственно, вместе с их взаимными спектрами амплитуд и фаз (7) в верхнем окне.

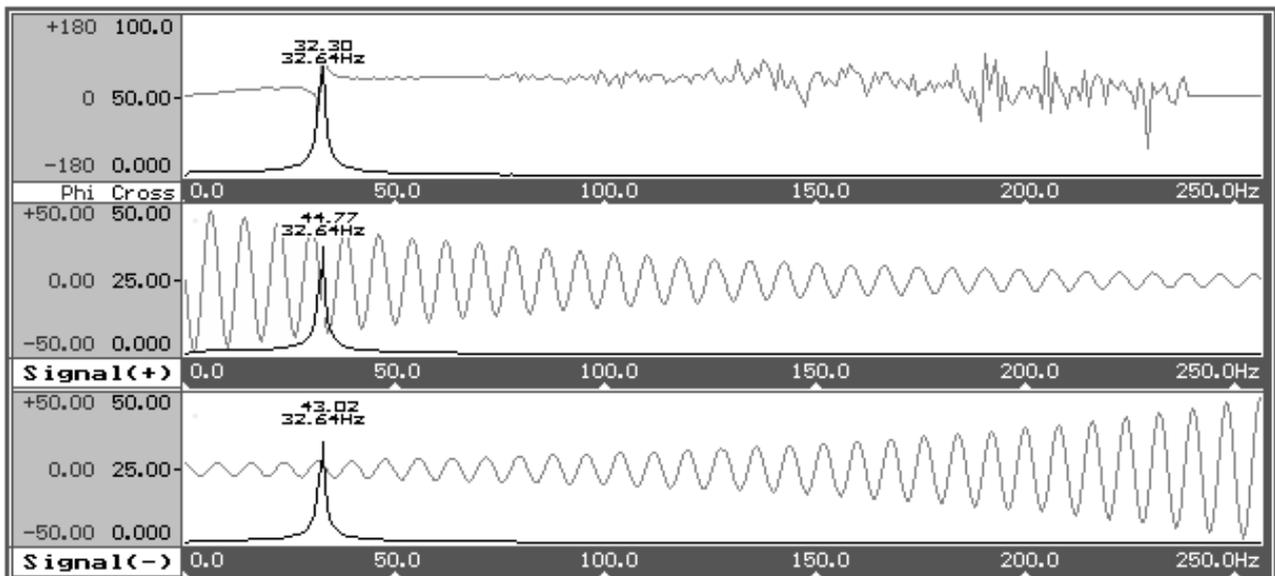


Рис. 1. Спектральный анализ затухающего во времени гармонического сигнала

Цифровые реализации затухающих колебаний моделировались и анализировались программой цифровой обработки сигналов *quatrix.exe*<sup>®</sup> [10], в которую были внедрены процедуры описанных выше вычислений.

При исходной длине цифровой реализации  $N_0 = N = 512$  отсчетов безразмерная несущая

частота сигнала равнялась  $f_0T = fT = 32,25$ , начальная фаза сигнала  $-\varphi = \pi/2$ . Параметр затухания был выбран равным  $\alpha = 2,5$ . Такие параметры являются типичными для наглядной иллюстрации затухающего гармонического сигнала.

## ПОСТРОЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

На рис. 2 вместе с осциллограммой затухающих колебаний изображен график характеристики (9), построенный средствами табличного процессора *MS Excel* по результатам описанного выше спектрального анализа.

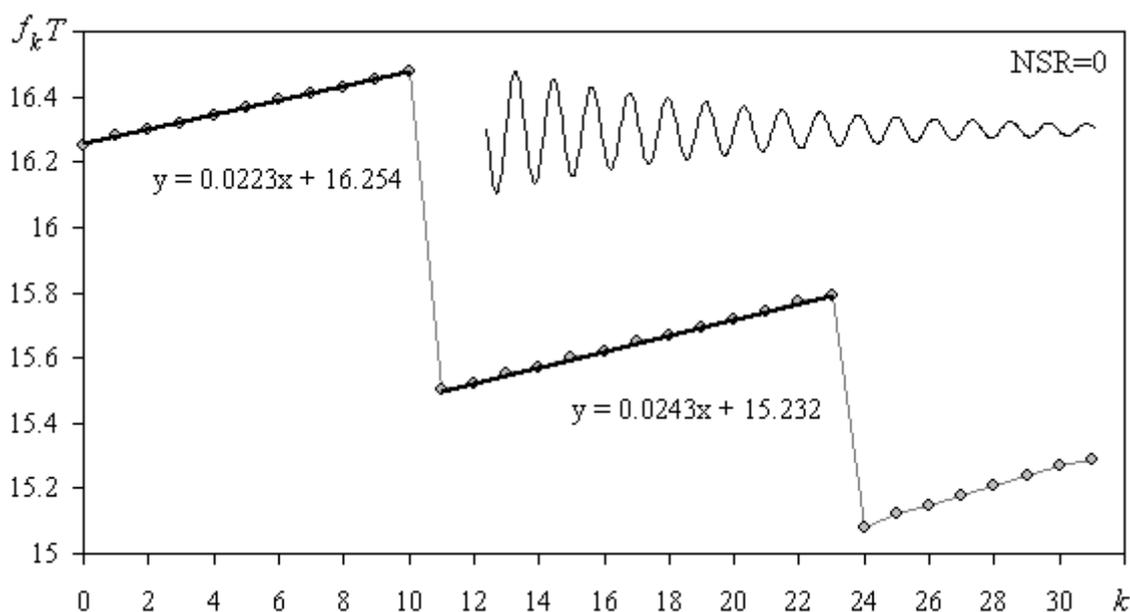


Рис. 2. Поведение характеристики  $f_k T$  чистого затухающего сигнала

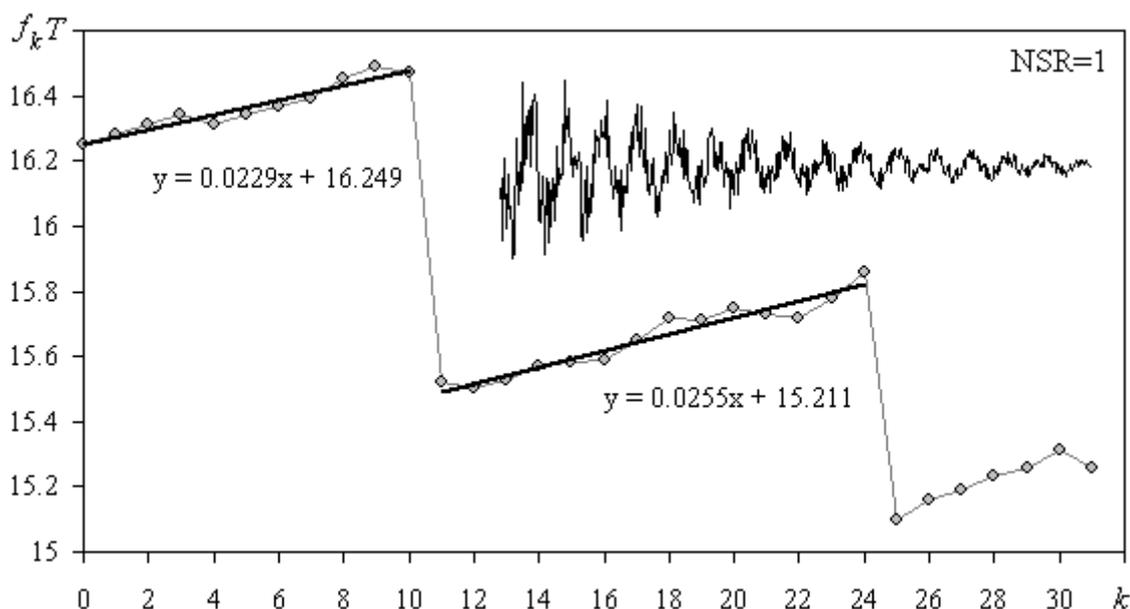


Рис. 3. Поведение характеристики  $f_k T$  зашумленного затухающего сигнала

В формуле (9) используется фаза  $\Phi_{m,k}$ , приведенная по модулю  $2\pi$ , поэтому график изменения параметра  $\mu$ , а вместе с ним и график всей характеристики  $f_k T$  принимает пилообразно-ступенчатую форму с линейными участками

$$y = \beta x + b, \quad (10)$$

с достаточно близкими для обоснования состоятельности метода значениями коэффициентов наклона  $\beta$  и констант смещения  $b$ . Последний параметр не играет никакой роли в излагаемом методе, в то время как параметр  $\beta$  и представляет собой (косвенную) оценку параметра  $\alpha$ .

## ВЛИЯНИЕ ШУМА

Для оценки устойчивости поведения характеристики  $f_k T$  по отношению к возмущающим факторам, в качестве последнего использовался шум, генерируемый датчиком псевдослучайных чисел *random*. Равномерно распределенный шум подмешивался к сигналу (4) в отношении 1:1 по размаху амплитуды. Характеристика  $f_k T$  зашумленного таким способом сигнала показана вместе с осциллограммой сигнала на рис. 3.

Из сравнения рис. 2 и рис. 3 видно, что довольно заметное зашумление сигнала несильно искажает поведение характеристики  $f_k T$ .

## ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ

Для оценки погрешности измерения параметра  $\beta$  был проведен численный эксперимент, в котором сигнал (4) моделировался при неизменном выбранном значении  $\alpha = 2,5$ , но с вариацией начальной безразмерной частоты сигнала  $f_0 T$  в пределах одного бина – от 32 до 33 с шагом по дробной части частоты  $\mu_0$ , равным 0,1. Результаты этого численного эксперимента приведены на рис. 4а. Похоже, что  $\beta$  меняется скачком при переходе параметра  $\mu_0$  через «критическое» значение 0,5 – когда эффект просачивания амплитуды [9] чистого гармонического сигнала максимален. Если частоту сигнала  $f_0$  оценивать с точностью до спектрального разрешения, т.е. не уточнять поправку  $\mu_0$ , то последний параметр следует рассматривать как искажающий фактор – с необходимостью оценки вносимой им погрешности в измерение параметра  $\beta$ . Представленные данные по  $\beta$  имеют выборочное среднее 0,051691 и стандартное отклонение, равное 0,003525. Если за относительную погрешность измерения  $\beta$  принять коэффициент вариации (отношение указанных величин), то она составит  $\varepsilon(\mu) = 0,068186 \approx 6,8 \%$ .

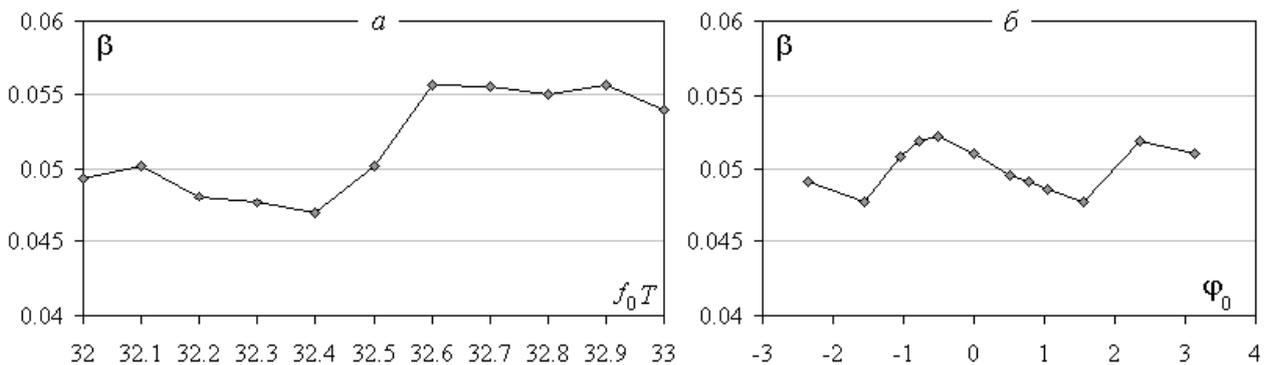


Рис. 4. Результаты численных экспериментов по оценке погрешности измерения  $\beta$

Другим параметром, порождающим некоторый разброс данных измерения  $\beta$ , является начальная фаза сигнала  $\varphi_0$ . Результаты численного эксперимента для определения соответствующей погрешности приведены на рис. 4б. Моделирование при заданных значениях  $N_0 = 512$ ,  $f_0 T = 32,25$  и  $\alpha = 2,5$  проводилось для фазовых углов  $\varphi_0 = 0, \pm\pi/6, \pm\pi/4, \pm\pi/3, \pm\pi/2, \pm 3\pi/4, \pi$ . Погрешность в данном случае оказалась равной  $\varepsilon(\varphi) = 0,001613/0,050045 \approx 3,2 \%$ . Таким образом, можно утверждать, что суммарная погрешность метода определения величины  $\beta$ , обусловленная рассмотренными факторами, составляет

$$\varepsilon(\mu, \varphi) = \sqrt{\varepsilon^2(\mu) + \varepsilon^2(\varphi)} = 0,075417 \approx 7,5\% . \quad (11)$$

На основании этих, заметно искажающих факторов ДПФ, с запасом (учитывающим шум и др.) можно ограничить относительную погрешность определения  $\beta$  величиной 10%.

## ГРАДУИРОВОЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Для определения связи между параметрами  $\alpha$  и  $\beta$  проводился численный эксперимент, в котором процесс (4) моделировался с различными значениями параметра  $\alpha$  (от 0,0 до 5,0 с шагом 0,1) при неизменных: исходной безразмерной частоте  $f_0 T = 32,25$  и длине реализации  $N_0 = 512$  отсчетов. Для каждого заданного значения  $\alpha$  строилась характеристика  $f_k T$ , и на подходящем линейном участке строилась линия регрессии для определения параметра  $\beta$ .

В результате была построена градуировочная характеристика  $\beta(\alpha)$ . На рис. 5 приведен график обратной зависимости  $\alpha(\beta)$ , служащий в качестве градуировочной функции для перевода измеренных коэффициентов наклона  $\beta$  в искомое значение параметра затухания  $\alpha$ .

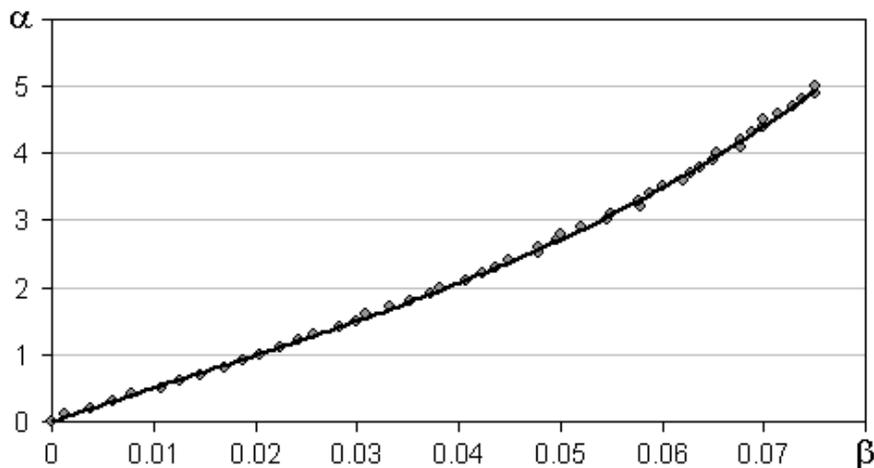


Рис. 5. Градуировочная функция  $\alpha(\beta)$  зависимости параметра затухания  $\alpha$  от коэффициента наклона  $\beta$

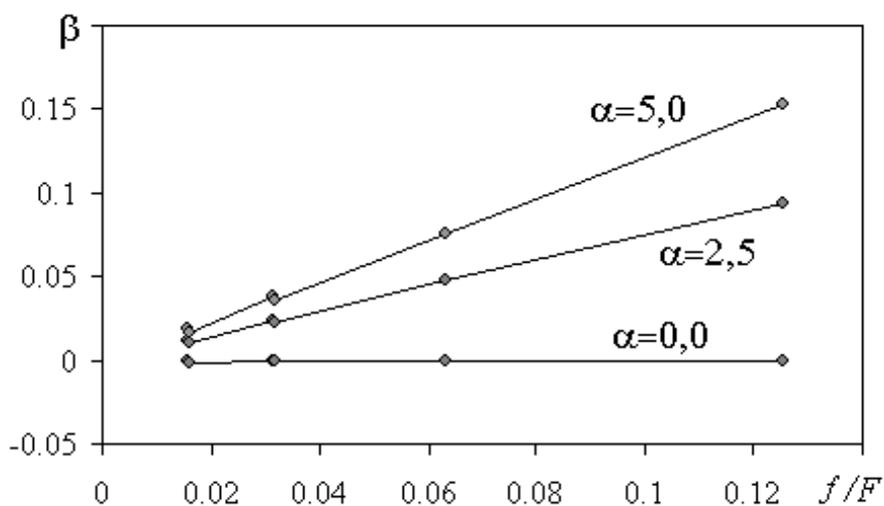


Рис. 6. Градуировочная зависимость  $\beta(f/F)$ , снятая для фиксированных значений параметра затухания  $\alpha$

Математическое выражение полученной градуировочной кривой имеет вид

$$\alpha(\beta) = 5489,2 \beta^3 - 226,06 \beta^2 + 51,969 \beta - 0,0047 . \quad (11)$$

Третья степень полинома, подобранная аппроксимацией имеющихся результатов численного эксперимента, вполне достаточна для описания данной зависимости.

Для окончательной оценки  $\alpha$  и пересчета, исходя из формулы (3), этого параметра в логарифмический декремент  $\delta$ , требуется определить зависимость самого параметра  $\beta$  от безразмерной частоты  $fT$ . Результаты численного моделирования по определению этой зависимости для трех фиксированных значений параметра затухания  $\alpha = 0,0; 2,5; 5,0$  и трех значений исходной длины реализации  $N = 512; 1024; 2048$  представлены на рис. 6. Они свидетельствуют о линейной связи

$$\beta = \kappa(\alpha) fT / N = \kappa(\alpha) f / F \quad (12)$$

параметра  $\beta$  (с зависящим от  $\alpha$  коэффициентом пропорциональности) с «физической» частотой сигнала  $f$ , обезразмеренной теперь не по спектральному разрешению  $\Delta f = 1/T$ , а по частоте дискретизации  $F$ .

Тот факт, что при постоянном значении  $\alpha$  зависимость  $\beta(f/F)$  линейна, сильно упрощает расчет, позволяя пользоваться для оценки  $\alpha$  единственной градуировочной зависимостью (11), снятой на начальной опорной частоте  $f_*$  с опорной частотой дискретизации  $F_*$ . Если измеренная частота сигнала на начальном шаге построения характеристики  $\beta$  окажется равной  $f_0$ , то для оценки  $\alpha$  в функцию (11) в качестве параметра  $\beta$  следует подставить

$$\beta = \beta_0 \frac{f_* F_0}{f_0 F_*}, \quad (13)$$

где  $\beta_0$  – измеренный коэффициент наклона линии (9), а  $F_0$  – частота дискретизации, установленная при приеме сигнала.

Поскольку кривая (11) уже снята при опорной относительной несущей частоте  $f_*/F_* = (m_* + \mu_*)/N_* = 32,25/512 = 0,063$ , то в силу (13) градуировочная кривая (11) приобретает вид

$$\alpha(\beta) = 1,3718 \beta^3 - 0,8969 \beta^2 + 3,2734 \beta - 0,0047, \quad (14)$$

и тогда в нее можно подставлять величину

$$\beta = \beta_0 \frac{F_0}{f_0} \approx \beta_0 \frac{N_0}{m_0}, \quad (15)$$

где вместо точного значения частоты  $f_0$  можно использовать ее целочисленное безразмерное значение  $m_0$  – адрес пика взаимного спектра амплитуд исходной, т.е. неусеченной пары реализаций длиной  $N_0$  отсчетов. Логарифмический декремент будет тогда равен  $\delta \approx \alpha / m_0$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан метод параметрического оценивания декремента экспоненциально затухающих гармонических колебаний, основанный на фазовых соотношениях между прямой и обращенной во времени цифровой реализацией процесса колебаний.

Метод позволяет по полученной в результате численного эксперимента градуировочной функции оценить величину декремента колебаний с относительной погрешностью не более 10 % в широком диапазоне изменения значений данного параметра.

Алгоритмическая реализация метода достаточно простая, а вычислительная процедура сравнительно нетрудоемкая: требуется лишь отказ от алгоритма БПФ при считанном числе

вычислений ДПФ (примерно от 10 до 20 раз), что некритично для современных ПК.

Разработанный метод может конкурировать с другими, известными способами оценки декремента колебаний (метод Прони, вейвлет-анализ и др.) благодаря относительно несложной вычислительной процедуре и малой чувствительности к зашумлению сигнала.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Сороко Л.М.** Сверхразрешение в оптике и затухающие волны // Материалы Пятой всесоюзной школы по голографии. – <http://bsfp.media-security.ru/school5/8.htm>.
- 2. Сергиенко А.Б.** Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2002. – 608 с.
- 3. Марпл-мл. С.Л.** Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: “Мир”, 1990. – 584 с.
- 4. Кухаренко Б.Г.** Технология спектрального анализа на основе быстрого преобразования Прони // Информационные технологии. – 2008. № 4. – С. 38-42.
- 5. Прокофьев А.Б., Шахматов Е.В.** Использование вейвлет-анализа свободных колебаний трубопроводной системы при оценке характеристик демпфирования // Известия Самарского научного центра РАН, т. 6, № 2, 2004. – С. 354-363.
- 6. Ханян Г.С.** Дифференциально-фазовый метод для определения частоты ЛДА-сигнала // Оптические методы исследования потоков: Труды IX международной научно-технической конференции / Под ред. Ю.Н. Дубнищева, Б.С. Ринкевичюса – М.: Издательский дом МЭИ, 2007. – С. 252-255.
- 7. Ханян Г.С.** Развитие и апробация дифференциально-фазового метода спектрального анализа при измерениях частоты и затухания моделируемых и реальных ЛДА-сигналов // Оптические методы исследования потоков: Труды 10-й Международной научно-технической конференции / Под ред. Ю.Н. Дубнищева, Б.С. Ринкевичюса – М.: Издательский дом МЭИ, 2009. – С. 90-93.
- 8. Ханян Г.С.** Определение мгновенной частоты ЛЧМ-сигнала дифференциально-фазовым методом спектрального анализа // Оптические методы исследования потоков: Труды XI международной научно-технической конференции / Под ред. Ю.Н. Дубнищева, Б.С. Ринкевичюса – М.: Издательский дом МЭИ, 2011 [Электронный ресурс].
- 9. Ханян Г.С.** Аналитическое исследование и оценка погрешностей в задаче измерения параметров гармонического сигнала методом преобразования Фурье // Измерительная техника. 2003. № 8. – С. 3-10.
- 10. Ханян Г.С., Шеина Н.В.** Система цифровой обработки сигналов для информационного обеспечения стендовых испытаний ГТД // “Научный вклад в создание авиационных двигателей”. Сб. трудов ЦИАМ под ред. В.А. Скибина и В.И. Солонина. – М.: “Машиностроение”, 2000, кн. 2. – С. 534-536.

G.S. Khanyan

Central Institute of Aviation Motors, Russia,  
111116, Moscow, Aviamotornaya st., 2. E-mail: dep007@rtc.ciam.ru

**DETERMINATION OF DECREMENT OF DAMPED OSCILLATIONS  
BY CONSEQUENT TRUNCATION OF THE FOURIER TRANSFORM**

*A method of parametric estimation of the decrement of damping harmonic oscillations based on calculation of the phase difference on the carrier frequency of direct and reverse-time oscillation process is proposed. By incremental truncation of the process' digital realization's discrete Fourier transform, a characteristics is formed the slope of which depends on the decrement. Numerical experiments are carried out on mathematical modeling and spectral analysis of damped oscillations to verify the method and determine the limits of its applicability.*

DAMPED OSCILLATIONS, DISCRETE FOURIER TRANSFORM, PHASE DIFFERENCE,  
ESTIMATION OF DECREMENT, ERRORS