

УДК 535.8

К.М. Лапицкий, В.И. Смирнов, С.С. Тутубалин

*Московский энергетический институт (технический университет), Россия,
111250, Москва, Красноказарменная ул., 14, E-mail: omfi@mpei.ac.ru*

МЕТРОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИЗМЕРЕНИЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ СВЕТА

АННОТАЦИЯ

Методами теории информации и компьютерного моделирования с применением нелинейного параметрического оценивания выполнено исследование предельной точности измерений параметров поляризации света. Рассчитана минимальная дисперсионная матричная граница оценок параметров поляризации (таких как степень поляризации и азимутальный угол линейно поляризованной компоненты). Представлены картины угловых распределений плотности информации для различных параметров. Оценены потери точности при ограничении диапазона углов поворота анализатора. Проведены тестовые измерения параметров качества поляризаторов с использованием классического и лазерного излучения.

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ, КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, НЕЛИНЕЙНОЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ, СТЕПЕНЬ ПОЛЯРИЗАЦИИ, ПАРАМЕТР КАЧЕСТВА ПОЛЯРИЗАТОРА

ВВЕДЕНИЕ

Использование поляризационных устройств в лазерной технике, в лазерных системах диагностики потоков жидкости и газа [1], в оптических устройствах фильтрации световых потоков в быту и на транспорте, в ряде систем 3D кино и телевидения делает актуальной проблему контроля качества поляризационных элементов, что связано с прецизионными измерениями характеристик поляризации излучения.

Эффективным методом достижения предельной точности оценивания является метод параметрической оптимизации. В общей постановке задача сводится к следующей схеме [2,3]. Пусть результат измерений описывается вектором измеренных значений выходной величины $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, причем каждое единичное измерение получено при некотором заданном значении параметра настройки измерительной схемы (фактора) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Из анализа физического содержания проводимых исследований, либо из априорных предположений общего характера, известен вид функциональной зависимости выходной величины от фактора с точностью до ряда параметров. Эти параметры могут быть заданы вектором параметров $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ и подлежат оцениванию в результате обработки данных. Назовем указанную функциональную зависимость параметрической моделью и обозначим как $\varphi(\mathbf{x}; \mathbf{b})$.

Качество оценок $\hat{\mathbf{b}} = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_m)$ вектора параметров $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ удобно характеризовать ковариационной матрицей $\mathbf{V}_{\hat{\mathbf{b}}}$, диагональные элементы которой дают дисперсии оценок параметров, а недиагональные элементы характеризуют взаимную коррелированность соответствующих оценок.

Согласно теореме Рао-Крамера [4] существует нижняя граница для ковариационной матрицы оценок $\mathbf{V}_{\hat{\mathbf{b}}}$, называемая минимальной дисперсионной матричной границей (МДМГ). Обозначим МДМГ как $\mathbf{M}\mathbf{V}_{\mathbf{b}}$, она определяет теоретическую предельную точность совместного оценивания параметров, потенциально достижимую при заданной статистике погрешностей измерений, при полном использовании информации, полученной из эксперимента с учетом априорных данных. МДМГ $\mathbf{M}\mathbf{V}_{\mathbf{b}}$ может быть найдена как матрица, обратная информационной матрице $\mathbf{I}\mathbf{M}_{\mathbf{b}}$, определяемой выражением

$$\mathbf{I}\mathbf{M}_{\mathbf{b}} = m_1 \left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \ln P \right) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \ln P \right)^T \right], \quad (1)$$

в котором m_1 – знак математического ожидания; $\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \ln P \right)$ – вектор-столбец с элементами $\left(\frac{\partial}{\partial b_i} \ln P \right)$, $i=1,2,\dots,m$; верхний индекс T используется для обозначения операции транспонирования; P – функция правдоподобия или условная плотность вероятности $w(\bar{y} | \bar{b})$, рассматриваемая как функция \bar{y} при фиксированном \bar{b} .

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА МДМГ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотрим схему поляризационных измерений, показанную на рис. 1.

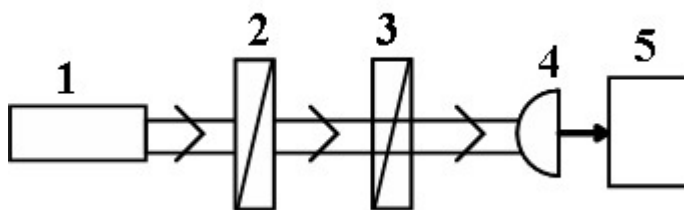


Рис. 1. Схема установки: 1 – источник излучения; 2 – поляризатор №1 (П1); 3 – поляризатор №2 (П1 или П2); 4 – фотоприемник; 5 – устройство обработки сигнала

Для данной схемы поляризационных измерений вектор результатов $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ представляет последовательность показаний цифрового регистратора, которые с точностью до масштабного коэффициента C_1 соответствуют интенсивности I излучения на выходе анализатора. Фактором $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ в данном случае является угол поворота анализатора. Ограничиваясь анализом смеси неполяризованного и линейно поляризованного света в случае идеального анализатора, для описания измерений можно использовать трехпараметрическую модель $\varphi(\mathbf{x}; \mathbf{b})$ с вектором параметров $\mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2)$, для которой в соответствие с законом Малюса [5] нетрудно получить следующее выражение

$$\varphi(x; \mathbf{b}) = \frac{1}{2}b_0(1-b_1) + b_1 \cos^2(x-b_2), \quad (2)$$

где параметр b_0 соответствует интенсивности излучения I_0 на входе анализатора, $b_0 = C_1 I_0 = A$, C_1 - коэффициент преобразования регистратора; параметр $b_1 = \gamma$, где γ – степени поляризации входного излучения; параметр $b_2 = \alpha$, где α – азимутальный угол плоскости поляризации линейно поляризованной составляющей анализируемого излучения.

Отсчет y_l для заданного угла поворота x_l , в предположении, что доминирующее значение имеет аддитивная составляющая погрешности, можно представить в виде

$$y_l = \frac{1}{2}A(1-\gamma) + A\gamma \cos^2(x_l - \alpha) + \Delta y_l, \quad (3)$$

где Δy_l - погрешность единичного отсчета. Также предположим, что Δy_l является нормально распределенной случайной величиной с нулевым средним значением и стандартным отклонением σ_y , а погрешности единичных отсчетов взаимно некоррелированы. При сделанных предположениях функция правдоподобия принимает вид

$$P = \prod_{l=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} \exp\left\{-\frac{[y_l - \varphi(x_l; \mathbf{b})]^2}{2\sigma_y^2}\right\}, \quad (4)$$

где n - число единичных измерений. Подставляя (4) в (1) с учетом некоррелированности единичных измерений и адекватности модели (2) для элемента информационной матрицы нетрудно получить

$$IM_{ij} = \frac{1}{\sigma_y^2} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial b_i} \left[\frac{1}{2}b_0(1-b_1) + b_0b_1 \cos^2(x_l - b_2) \right] \frac{\partial}{\partial b_j} \left[\frac{1}{2}b_0(1-b_1) + b_0b_1 \cos^2(x_l - b_2) \right]. \quad (5)$$

При измерении y_l на интервале X равномерно с достаточно малым шагом Δx , выбранным из условия малости ошибки смещения по сравнению с σ_y из выражения (5), переходя от суммирования к интегрированию, при $n \gg 1$ получим

$$IM_{ij} = \frac{n}{\sigma_y^2 X} \int_X \frac{\partial \varphi(x_l, \mathbf{b})}{\partial b_i} \frac{\partial \varphi(x_l, \mathbf{b})}{\partial b_j} dx. \quad (6)$$

Применяя это выражение для анализа поляризационных измерений с моделью (2), где угловой фактор меняется в диапазоне от 0 до 2π , получим

$$IM_{ij} = \frac{n}{\sigma_y^2 2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial b_i} \left[\frac{1}{2}b_0(1-b_1) + b_0b_1 \cos^2(x-b_2) \right] \frac{\partial}{\partial b_j} \left[\frac{1}{2}b_0(1-b_1) + b_0b_1 \cos^2(x-b_2) \right] dx. \quad (7)$$

где индексы i и j могут иметь значения 0,1,2. Соотношение (7) позволяет получить информационную матрицу и последующим ее обращением найти аналитическое выражение для МДМГ. Опуская громоздкие выкладки, приведем важный результат:

$$\mathbf{M}\mathbf{V}_b = \mathbf{I}\mathbf{M}_b^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4\sigma_y^2}{n} & -\frac{4\gamma\sigma_y^2}{A} & 0 \\ -\frac{4\gamma\sigma_y^2}{A} & \frac{4(2+\gamma^2)\sigma_y^2}{A^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_y^2}{A^2\gamma^2} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Этот результат означает, что минимальные среднеквадратические погрешности оценок параметров равны:

$$(\sigma_A)_{\min} = 2 \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}}, \quad (\sigma_\gamma)_{\min} = 2 \frac{\sqrt{2+\gamma^2}}{A} \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}}, \quad (\sigma_\alpha)_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{A\gamma} \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}}, \quad (9)$$

причем коэффициенты корреляций этих оценок составляют:

$$R_{A\gamma} = \frac{-\gamma}{\sqrt{2+\gamma^2}}, \quad R_{A\alpha} = 0, \quad R_{\gamma\alpha} = 0. \quad (10)$$

На рис.2 результаты, выраженные формулами (9) и (10), проиллюстрированы графиками зависимости соответствующих параметров от степени поляризации, приведенных для случая $A=1$ и $(\sigma_y/\sqrt{n})=1$.

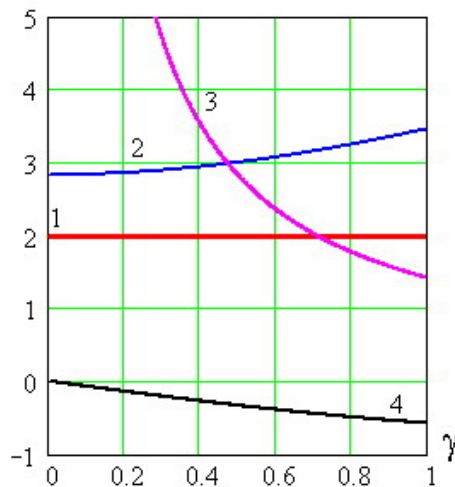


Рис. 2. Зависимость элементов МДМГ от степени поляризации:
1 - $(\sigma_A)_{\min}$; 2 - $(\sigma_\gamma)_{\min}$; 3 - $(\sigma_\alpha)_{\min}$; 4 - $R_{A\gamma}$.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Результат, выраженный матрицей (8), был проверен методом численного моделирования. На входе процедуры в модели (2) задавались истинные значения параметров поляризации. С помощью генератора нормально распределенных случайных чисел имитировалась погрешность единичных отсчетов Δu_l , и по формуле (3) рассчитывались результаты u_l . Число единичных отсчетов N составляло $N=24$, что соответствовало шагу $\Delta\alpha=15^\circ$. Этого было достаточно для того, чтобы расчеты элементов матрицы (8), выполненные с использованием суммирования по формуле (5) с высокой точностью

совпадали с аналитическими оценками во всем диапазоне изменения параметров модели.

Процедура оптимизации проводилась в среде *Mathcad* с использованием программы *genfit*. Методом наименьших квадратов, который в заданных условиях позволял получать оценки максимального правдоподобия, осуществлялась параметрическая идентификация результатов и находились оценки параметров поляризации.

Численный эксперимент воспроизводился M раз с разными массивами случайных ошибок Δy_i и, таким образом, моделировалась серия оценок из M статистически однородных независимых измерений. По рассеянию результатов в этой серии с помощью стандартных статистических процедур определялись интервальные оценки параметров поляризации, включающие точечные оценки СКО этих оценок и их коэффициентов корреляции.

Для получения погрешностей полученных точечных оценок СКО описанная процедура воспроизводилась K раз.

В нашем эксперименте числа повторений составляли $M=10^4$ и $K=10$. Ниже в таблицах 1 и 2 приведены результаты численного моделирования. Здесь истинные минимальные среднеквадратические отклонения (СКО) оценок соответствующих параметров рассчитаны по формулам (9), их коэффициенты корреляции – по формулам (10).

Таблица 1.

Параметр	Истинное значение параметра	Истинное минимальное СКО	СКО, полученное в численном эксперименте
A	1	$4,082 \cdot 10^{-3}$	$(4,077 \pm 0,020) \cdot 10^{-3}$
γ	0,8	$6,633 \cdot 10^{-3}$	$(6,622 \pm 0,035) \cdot 10^{-3}$
α	45°	$0,2068^\circ$	$(0,2066 \pm 0,0010)^\circ$

Таблица 2.

Коэффициент корреляции	Теоретическое значение	Результат численного эксперимента
$R_{A\gamma}$	-0,4924	$-0,4936 \pm 0,0043$
$R_{A\alpha}$	0,0000	$-0,0015 \pm 0,0093$
$R_{\gamma\alpha}$	0,0000	$0,0016 \pm 0,0074$

Данные таблиц 1 и 2 подтверждают правильность аналитических оценок.

Существенно, что численный эксперимент позволяет проверить соответствие величины σE параметру, который может быть назван эмпирическим СКО σE :

$$\sigma E = \sqrt{\frac{\sum_i [y_i - g(x_i)]^2}{N - 3}}, \quad (11)$$

где $g(x)$ - оптимальная модель $\varphi(x; \mathbf{b})$, полученная в результате параметрической идентификации. Описанный выше численный эксперимент дал следующий результат $\sigma E = 0,96 \pm 0,14$. Таким образом, эмпирический СКО может быть использован в качестве σE при оценке среднеквадратического значения погрешности единичных отсчетов при обработке физического эксперимента.

На практике оценку степени поляризации иногда выполняют, используя соотношение

$$\hat{\gamma} = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{y_{\max} + y_{\min}}. \quad (12)$$

Численный эксперимент позволяет определить эффективность оценки (12) в определенных выше условиях. Статистическая обработка показывает, что такая оценка является примерно на 1,4% смещенной в сторону завышения, а ее эффективность $E = \frac{\sigma_{\gamma_{\min}}^2}{\sigma_{\gamma_1}^2}$ составляет всего около 33%.

ИНФОРМАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Анализ формулы (7) для элементов информационной матрицы указывает на то, что величина

$$w_{ij}(x) = \frac{n}{\sigma_y^2 2\pi} \frac{\partial}{\partial b_i} \left[\frac{1}{2} b_0 (1 - b_1) + b_0 b_1 \cos^2(x - b_2) \right] \frac{\partial}{\partial b_j} \left[\frac{1}{2} b_0 (1 - b_1) + b_0 b_1 \cos^2(x - b_2) \right]$$

может быть интерпретирована как угловая плотность информации элемента IM_{ij} . В этой связи в первую очередь представляют интерес угловые зависимости плотности информации для оцениваемых параметров. Графики зависимостей $w_{00}(x)$, $w_{11}(x)$, $w_{22}(x)$ в полярных координатах представлены на рис. 4. Для наглядности графики нормированы в максимуме на единицу. Расчеты выполнены при $A = 1$, $\gamma = 0,3$ и $\alpha = 30^\circ$.

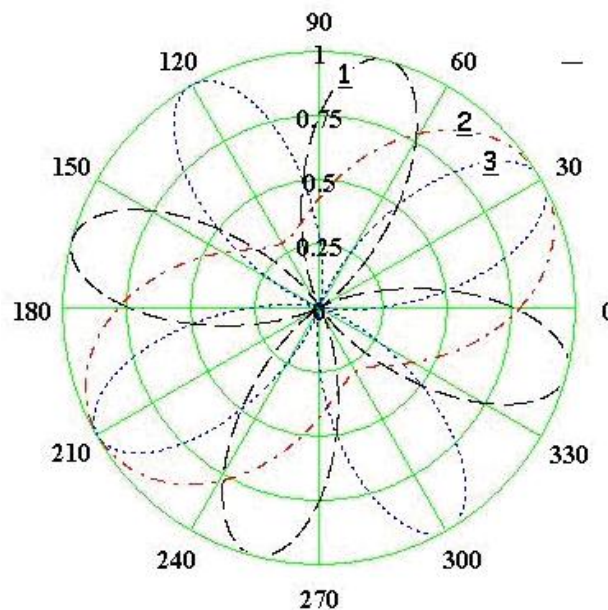


Рис. 4. Относительная угловая плотность информации для оценки амплитуды (кривая 1), степени поляризации (кривая 2), азимута (кривая 3).

При работе с поляризационным измерительным оборудованием возможна ситуация, когда угловой диапазон измерений не перекрывает все 360° , то есть существует некоторая слепая область. В этой связи представляет интерес исследование потери информации и изменение МДМГ в зависимости от размера и положения слепой области относительно азимута поляризованной компоненты. Результаты расчетов потери точности оценок параметров поляризации представлены на рис. 5.

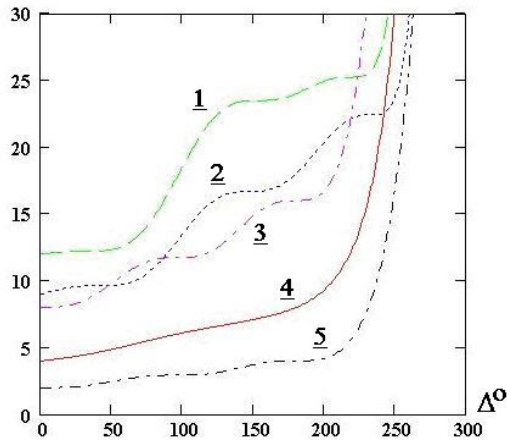


Рис. 5. Изменение минимальных дисперсий оценок параметров поляризации, приведенных к условию $A = 1$, $(\sigma_y/\sqrt{n}) = 1$, $\alpha = 0$ в зависимости от величины Δ слепой области: 1 – для степени поляризации при $\gamma=1$; 2 – для степени поляризации при $\gamma=0,5$; 3 – для азимута при $\gamma=0,5$; 4 – для амплитуды при $\gamma=1$ и $\gamma=0,5$; 5 – для азимута при $\gamma=1$.

Как видно из рис. 5 минимальные дисперсии оценок достаточно медленно возрастают при увеличении Δ от 0 примерно до 200° . При дальнейшем увеличении слепой области наблюдается резкий рост погрешности. В представленных ниже практических измерениях размер слепой области не превышал 45° и соответствующая потеря информации была малосущественной. Отметим также, что при $\Delta \neq 0$ возникают взаимные корреляции оценок любой пары параметров.

С учетом особенностей угловой зависимости плотности информации (см. рис. 4) элементы МДМГ сложным образом зависят от Δ , поскольку элементы информационной матрицы определяются выражением

$$IM_{ij} = IM_{ij}(A, \gamma, \alpha, \Delta; x) = \int_0^{2\pi-\Delta} w_{ij}(A, \gamma, \alpha; x) dx.$$

В заключение данного раздела в качестве иллюстративного примера приведем 3D графическое представление в виде цветовой карты двумерной зависимости $IM_{11}(\alpha, \Delta)$ при $\gamma=1$, $A=1$, $(\sigma_y/\sqrt{n})=1$ (рис. 6). Величина IM_{11} меняется от 0,125 до 0,012 с увеличением Δ от 0 до 300° . Ярко выражен периодический характер зависимости от азимута α . Справа показана линейная цветовая шкала, соответствующая указанному диапазону изменения величины IM_{11} .

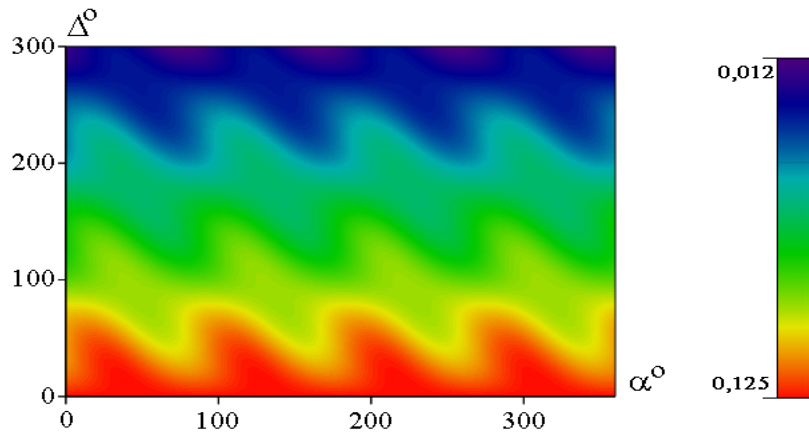


Рис. 6. Зависимость элемента информационной матрицы $IM_{11}(\alpha, \Delta)$ при $(\sigma_y/\sqrt{n})=1$, $A=1$ и $\gamma=1$, представленная цветовой картой.

МДМГ В СЛУЧАЕ НЕИДЕАЛЬНОГО ПОЛЯРИЗАТОРА

В общем случае, когда в качестве анализатора используется неидеальный поляризатор с коэффициентами пропускания по интенсивности τ_1, τ_2 ($\tau_1 > \tau_2$) для ортогональных компонент вектора напряженности, параметрическая модель может быть представлена в виде

$$y = \frac{1}{2}A(1-\gamma)\tau_1 + \frac{1}{2}A(1-\gamma)\tau_2 + A\gamma\tau_1 \cos^2(x-\alpha) + A\gamma\tau_2 \sin^2(x-\alpha). \quad (11)$$

Используя параметр качества поляризатора [6] $\kappa = \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$, (11) можно привести к выражению

$$y = \frac{1}{2}A(\tau_1 + \tau_2)(1 - \gamma\kappa) + A(\tau_1 + \tau_2)\gamma\kappa \cos^2(x - \alpha) \quad (12)$$

Нетрудно заметить, что модель (12) в точности соответствует уже рассмотренной модели (2), если положить

$$b_0 = C_1 I_0 (\tau_1 + \tau_2) = A(\tau_1 + \tau_2), \quad b_1 = \gamma\kappa, \quad b_2 = \alpha. \quad (13)$$

Поэтому, для проведения метрологического анализа измерений с неидеальным поляризатором, можно воспользоваться матрицей (8).

РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В экспериментальной части проводились измерения параметров качества двух образцов поляризаторов П1 и П2 двумя способами.

В экспериментах, выполненных первом способом, в качестве источника использовалась лампа накаливания, неполяризованное излучение которой коллимировалось и проходило через поляризаторы на фотоприемник. Выполнялись измерения по схеме П1+П1 и П1+П2. Пример результата измерений в полярных координатах показан на рис.7.

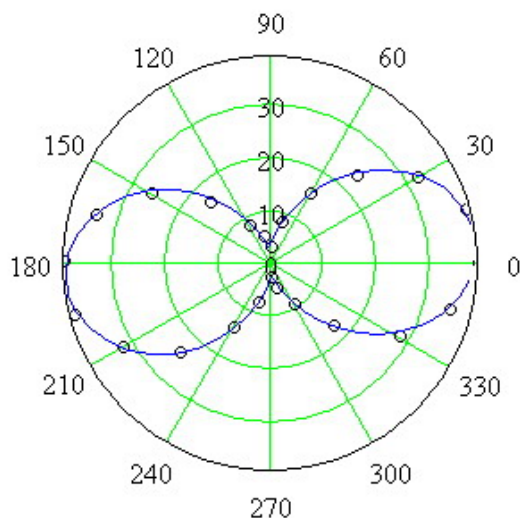


Рис. 7. Пример результата поляризационных измерений по схеме П1+П2. Оптимизация по критерию МНК для данного примера дает: $b_0=41,6$; $b_1=0,861$; $b_2=185,3^\circ$.

В соответствии с моделью (12) в опыте по схеме П1+П1 параметр b_1 соответствует κ_1^2 и позволяет дать оценку параметра качества поляризатора П1 по формуле $\kappa_1 = \sqrt{b_1}$. В опыте по схеме П1+П2 параметр b_1 соответствует произведению $\kappa_1\kappa_2$ и позволяет дать оценку параметра качества поляризатора П2 по формуле $\kappa_2 = b_1 / \kappa_1$.

В экспериментах, выполненных вторым способом, использовался лазерный источник, излучение которого было практически идеально линейно поляризованным. В такой ситуации параметр b_1 при измерении по схеме П2 непосредственно соответствует параметру качества поляризатора П2: $\kappa_2 = b_1$.

Во всех измерениях путем статистических исследований массивов остаточных невязок проводилась проверка нормальности, однородности и некоррелированности единичных отсчетов [7]. Определялась эмпирическая дисперсия единичных отсчетов, что позволило дать оценку погрешности итоговых результатов с использованием стандартных правил расчета погрешности косвенных измерений. Результаты измерений параметров качества поляризаторов представлены в таблице 3.

Таблица 3.

Источник - лампа	Источник - лампа	Источник - лазер
Схема П1+П1	Схема П1+П2	Схема П2
$\kappa_1=0,9036\pm0,0010$	$\kappa_2=0,9771\pm0,0027$	$\kappa_2=0,9630\pm0,0068$

Расхождение оценок κ_2 , полученных разными способами, может быть связано как с неучтенными методическими погрешностями, так и с возможной дисперсией коэффициентов пропускания τ_1 и τ_2 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналитически и методом численного моделирования найдена минимальная дисперсионная матричная граница оценок параметров поляризации света, что позволяет определять эффективность различных алгоритмов обработки данных. Анализ потерь точности при ограничении области измерений по углу поворота анализатора показал, что минимальные дисперсии оценок растут примерно в два раза при ограничении до $180-200^\circ$, затем резко увеличиваются. Тестовые измерения степени поляризации излучения и параметров качества поляризаторов с использованием классического и лазерного излучения

показывают, что использование параметрической оптимизации при обработке данных обеспечивает уменьшение погрешности до десятых долей процента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ринкевичюс Б.С. Лазерная диагностика потоков. М.: МЭИ. 1990. 288 с.
2. Смирнов В.И. Фундаментальные ограничения точности совместных измерений параметров оптических полей. ИТ. №9. 2010. С. 26-31.
3. Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки измерений. М.: Сов. радио. 1983. 192 с.
4. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров. М.: Статистика. 1979. 349 с.
5. Гудмен Дж. Статистическая оптика. М.: Мир. 1988. 528 с.
6. Ищенко Е.Ф., Соколов А.Л. Поляризационный анализ. 1998. 208 с.
7. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир. 1989. 542 с.

K.M. Lapitskiy, V.I. Smirnov, S.S. Tutubalin

*Moscow Power Engineering Institute (technical university), Russia,
111250, Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14, E-mail: omfi@mpei.ac.ru*

METROLOGICAL INVESTIGATION OF LIGHT POLARIZATION MEASUREMENT

Methods of information theory and computer simulation with application of nonlinear parametric estimation are used for investigation of extreme measuring accuracy of light polarization parameters. The minimum variance matrix border for estimations of polarization parameter (such as a degree of polarization and an azimuthally angle of linearly polarized component) is calculated. Pictures of information density angular distributions for different parameters are represented. Lost significances are sized up at limiting a range of analyzer rotation angles. A test measurement of quality parameters of polarizes with usage classical and laser light are conducted.

POLARIZATION MEASUREMENT, COMPUTER SIMULATION, NONLINEAR PARAMETRIC ESTIMATION, DEGREE OF POLARIZATION, POLARIZER QUALITY PARAMETER