



*Двенадцатая Международная научно-техническая конференция
«Оптические методы исследования потоков»
Москва, 25 — 28 июня 2013 г.*

УДК 535.8

Г.А. Кащеева, В.С. Соболев

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения РАН, Россия
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1, E-mail: sobolev@iae.nsk.su*

**МОДЕЛИРОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ МАКСИМАЛЬНО ПРАВОПОДОБНЫХ
ОЦЕНОК ЧАСТОТЫ СИГНАЛА ЛАЗЕРНЫХ ДОПЛЕРОВСКИХ СИСТЕМ
ПРИ КОНЕЧНОМ ЧИСЛЕ ОТСЧЕТОВ**

Представлены алгоритмы получения максимально правдоподобных оценок частоты сигнала лазерных доплеровских систем по 2-м и 3-м его комплексным отсчетам, а также результаты компьютерного моделирования этих алгоритмов. Показано, что оценки частоты практически не смещены, а добавление 3-го отсчета существенно (в три-четыре раза) повышает точность измерений.

**ЛАЗЕРНЫЕ ДОПЛЕРОВСКИЕ СИСТЕМЫ, МАКСИМАЛЬНО ПРАВОПОДОБНЫЕ
ОЦЕНКИ**

ВВЕДЕНИЕ

Повышение точности измерений скорости потоков с помощью погодных радаров, ветровых лидаров и лазерных доплеровских анемометров (ЛДА) является весьма актуальной задачей. Сигналы этих систем хорошо аппроксимируются нормальным узкополосным случайным процессом, что позволяет применять алгоритмы теории оптимального приема, дающее, как известно, минимальные дисперсии оценок параметров получаемых сигналов. Специалисты в области погодной радиолокации в конце прошлого века предложили несколько способов повышения точности этих систем. Вначале был предложен так называемый пульспарный метод [1], когда доплеровская частота определялась на основании приема эхо сигналов от множества пар последовательных зондирующих импульсов.

Затем были предложены методы получения оценок частоты и от большего числа импульсов (полипульспарный метод) [2]. Этот метод основан на известном соотношении: моменты спектра мощности случайного процесса равны соответствующим производным его корреляционной функции в нуле. Предложенные подходы были применены также и для обработки сигналов ветровых лидаров, но с использованием двух и более отсчетов эхо сигнала, получаемого от единичного зондирующего импульса. Анализ этих методов показал, что аналогичные алгоритмы можно применить и при обработке сигналов лазерных доплеровских анемометров, но с некоторым приближением, состоящим в том, что на интервале оценки доплеровской частоты ее величина предполагается неизменной. Дальнейшие исследования [3,4] показали, что при некоторой модификации эти методы отвечают критериям максимального правдоподобия.

В докладе представлена методика получения максимально правдоподобных оценок частоты сигналов доплеровских систем и результаты модельного эксперимента с оценкой получаемых средних значений и относительных среднеквадратичных отклонений для двух

доплеровских систем с малым и большим числом реальных (или виртуальных) интерференционных полос в измерительном объеме (ширина корреляционной функции сигнала на уровне $\exp(-1)$ ее огибающей составляла 3 и 10 доплеровских периодов) при периоде дискретизации, равном 0.2 и 0.1 доплеровских периода. Оценки частоты (скорости) при этом вычислялись при использовании 2-х (пульсарный метод) и трех отсчетов сигнала. Такой выбор числа отсчетов позволяет получить максимально правдоподобные оценки скорости с максимальным быстродействием, что является необходимым условием при исследовании турбулентных течений.

АЛГОРИТМ МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНОЙ ОЦЕНКИ ДОПЛЕРОВСКОЙ ЧАСТОТЫ

Логарифм функции правдоподобия частоты доплеровского сигнала, в матричном виде может быть представлен следующим образом [5]

$$\ln P(Z, \omega) = Z^{Tr*} D(C)^{-1} D^* Z, \quad (1)$$

где Z – вектор-столбец комплексных отсчетов сигнала, ω – подлежащая оценке доплеровская частота D – диагональная матрица с элементами $\exp(j\omega kT)$, C – матрица огибающей корреляционной функции, нормированной на дисперсию сигнала, $(C)^{-1}$ – обратная матрица корреляционной функции. Звездочка в индексе означает операцию комплексного сопряжения, индекс Tr – операцию транспонирования. Максимум этого выражения, как известно, соответствует максимально правдоподобной оценке неизвестного параметра сигнала. Для получения такой оценки доплеровской частоты запишем известные выражения для нормированной на дисперсию корреляционной функции сигналов доплеровского лидара (или радара) и лазерного анемометра в отсутствии аддитивного шума в дискретной форме.

Для лидара:

$$R_L(kT) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{kT}{\tau_n}\right)^2 + j\omega kT\right], \quad (2)$$

Для анемометра:

$$R_A(kT) = \exp\left[-(\xi\omega kT)^2 + j\omega kT\right], \quad (3)$$

где, τ_n – длительность зондирующего импульса на уровне $\exp(-1)$ его огибающей, $k=0, 1, 2$ – номера значений корреляционной функции, T – период дискретизации доплеровского сигнала, ξ – известный параметр оптической схемы анемометра, определяемый числом реальных или виртуальных интерференционных полос в его измерительном объеме. Тогда матрицы C огибающих корреляционных функций обеих систем для двух ($k=0, 1$) и трех ($k=0, 1, 2$) комплексных отсчетов доплеровского сигнала в отсутствии аддитивного шума запишутся как

$$C_2 = \begin{vmatrix} 1 & e^{-x^2} \\ e^{-x^2} & 1 \end{vmatrix}, \quad C_3 = \begin{vmatrix} 1 & e^{-x^2} & e^{-4x^2} \\ e^{-x^2} & 1 & e^{-x^2} \\ e^{-4x^2} & e^{-x^2} & 1 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

где $x = \left(\frac{T}{\tau_n}\right)$ – для лидара, и $x = \xi\omega T = \frac{\omega T}{2\pi M}$ для анемометра; M – число интерференционных полос на уровне $\exp(-1)$ огибающей корреляционной функции сигнала. Таким образом,

параметр x не зависит от доплеровской частоты ω для лидара и является функцией ω для анемометра.

Обратные матрицы огибающих для двух и трех отсчетов соответственно примут вид:

$$(C_2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{e^{x^2} - e^{-x^2}} & -1 \\ -1 & e^{x^2} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$(C_3)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(e^{-2x^2} - 1)^2} & \begin{vmatrix} \frac{1}{e^{-2x^2} + 1} & -e^{-x^2} & \frac{e^{-2x^2}}{e^{-2x^2} + 1} \\ -e^{-x^2} & e^{-4x^2} + 1 & -e^{-x^2} \\ \frac{e^{-2x^2}}{e^{-2x^2} + 1} & -e^{-x^2} & \frac{1}{e^{-2x^2} + 1} \end{vmatrix} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Логарифм функции правдоподобия частоты доплеровского сигнала лидара и лазерного анемометра при подстановке соответствующих выражений для двух отсчетов в (1) определится как

$$\ln [F_2(Z, \omega)] = \left(\frac{2}{e^{x^2} - e^{-x^2}} \right) \left[0.5 |Z_0|^2 |Z_1|^2 e^{x^2} - |Z_0| |Z_1| \cos(\omega T - \Delta\phi) \right], \quad (7)$$

где Z_0, Z_1 – соответствующие комплексные отсчеты сигнала, взятые с интервалом T , $\Delta\phi = \arg(Z_0^* \cdot Z_1)$.

Дифференцируя результат по частоте ω , приравнявая производную нулю, получим следующее уравнение правдоподобия для двух отсчетов сигнала лидара:

$$\frac{d}{d\omega} \{ \ln [F_2(Z, \omega)] \} = \left(\frac{2}{e^{x^2} - e^{-x^2}} \right) \left(\frac{1}{T} \right) |Z_0| |Z_1| \left[\sin(\omega T - \Delta\phi) \right] = 0, \quad (8)$$

откуда найдем

$$\left[\sin(\omega T - \Delta\phi) \right] = 0,$$

и, следовательно, максимально правдоподобная оценка частоты лидара будет иметь вид

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{T} = \frac{\arg(Z_0^* Z_1)}{T}. \quad (9)$$

Действуя аналогично можно получить уравнения правдоподобия для трех и более отсчетов доплеровского сигнала лидара и анемометра.

МОДЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Чтобы оценить качество получаемых оценок частоты, был проведен модельный компьютерный эксперимент, который состоял из двух этапов. На первом этапе, для заданной формы автокорреляционной функции доплеровского сигнала, строилась его модель, как функция времени. Алгоритм предполагал суммирование в соответствии с нижеприведенным

выражением сигналов от многих рассеивающих частиц, прошедших через измерительный объем ЛДА при постоянной скорости движения каждой из них

$$Z(t_k) = \sum_{i=0}^N \exp \left[- \left(\frac{t_k - t_i}{M \cdot T_D} \right)^2 + j\omega_D (t - t_i) \right], \quad (10)$$

где ω_D – круговая доплеровская частота, равная $2\pi \cdot 1$ Гц, M – число интерференционных полос в измерительном объеме ЛДА, t_k – текущий k -й момент времени, а t_i – момент появления i -й рассеивающей частицы в центре измерительного объема, T_D – период доплеровского сигнала, N – число прошедших частиц, j – мнимая единица. Результатом моделирования являлось получение массива двух ортогональных компонент комплексного сигнала $Z(t_k)$. Значения вещественной и мнимой компонент этого сигнала в каждый дискретный момент времени t_k рассматривались как отсчеты комплексного сигнала Z_k . На Рис.1 в качестве примера приведена действительная компонента реализации сигнала с временем корреляции, равным трем доплеровским периодам и интервалом дискретизации равным $0.2 T_D$. Число отсчетов реализации равно 1500 (k – номер отсчета). Длина реализации составляла 300 периодов сигнала. Число отсчетов на один доплеровский период равнялось 5. Задача решалась в отсутствии аддитивного шума.

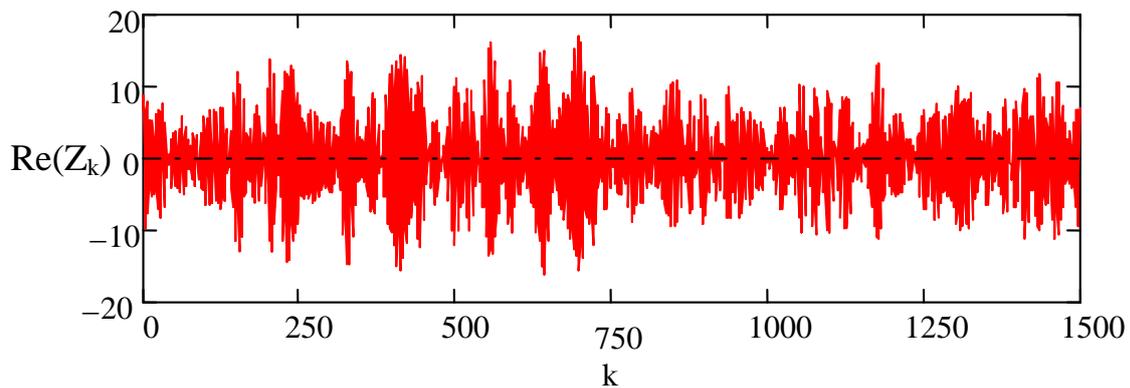


Рис. 1. Вид реализации действительной компоненты моделируемого сигнала для доплеровской системы с малым временем корреляции (3 периода сигнала).

На втором этапе вычислялись элементы прямой и обратной корреляционных матриц и решалось уравнение правдоподобия относительно доплеровской частоты с использованием двух и трех отсчетов модельного сигнала. На Рис.2 (а, б) представлены результаты максимально правдоподобных оценок частоты лидера для доплеровской системы с малым числом интерференционных полос (время корреляции равно 3 –м доплеровским периодам на уровне $\exp(-1)$ огибающей). Оценка частоты на каждом интервале осуществлялась по 2-м комплексным отсчетам (Z_k, Z_{k+1}) сигнала - Рис. 2(а), и, соответственно, по 3-м отсчетам (Z_k, Z_{k+1}, Z_{k+2}) - Рис.2(б).

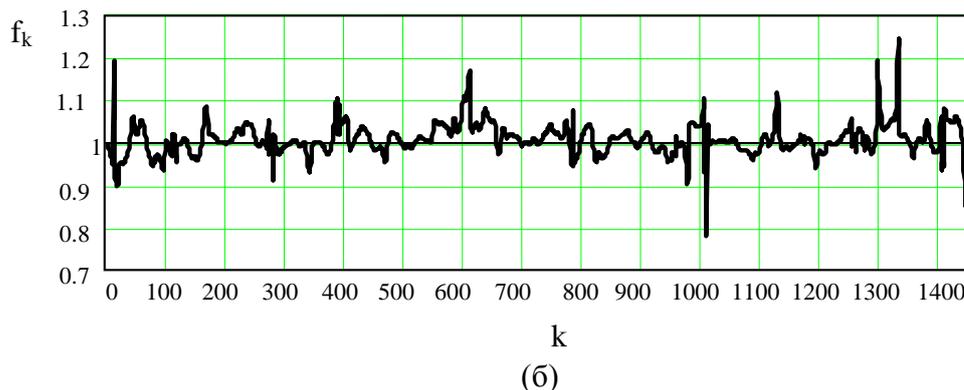
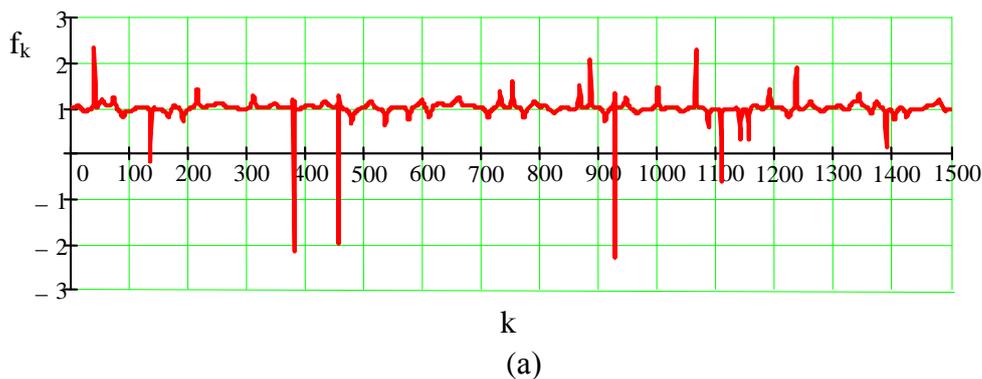


Рис. 2. Графики максимально правдоподобных оценок значений мгновенной частоты f_k для реализации, приведенной на Рис. 1. (а) – оценка по двум комплексным отсчетам; (б) – оценка по трем комплексным отсчетам.

На Рис.3 приведена действительная компонента реализации сигнала с временем корреляции, равным 10 доплеровским периодам и интервалом дискретизации, равным $0.2 T_D$. Длина реализации, как и в первом случае, составляла 300 периодов сигнала. Число отсчетов на один доплеровский период равнялось 5. Общее число отсчетов реализации равно 1500 (k – номер отсчета).

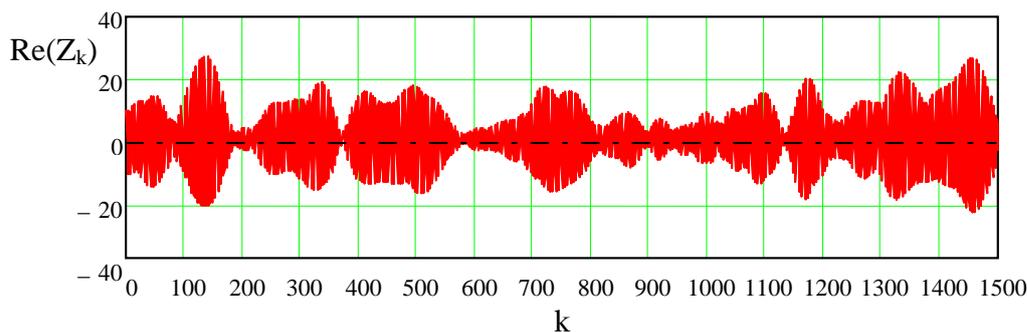
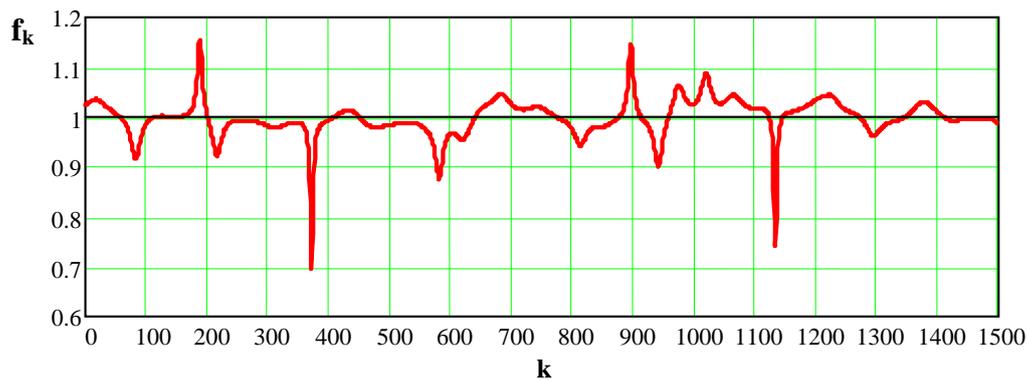
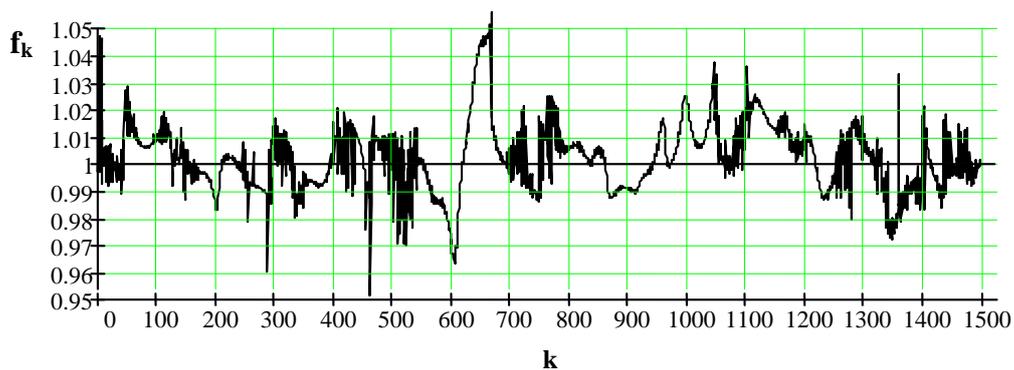


Рис. 3. Вид реализации действительной компоненты моделируемого сигнала для доплеровской системы с временем корреляции 10 периодов сигнала.

На рис. 4 (а, б) представлены аналогичные оценки для доплеровской системы с временем корреляции, равным 10 доплеровским периодам. Длина реализации доплеровского сигнала составляла 300 периодов сигнала (1500 отсчетов), число отсчетов на один доплеровский период равнялось 5.



(a)



(б)

Рис. 4. Графики максимально правдоподобных оценок значений мгновенной частоты f_k для реализации, приведенной на рис. 3. (а) – оценка по двум комплексным отсчетам; (б) – оценка по трем комплексным отсчетам.

Что касается доплеровской системы с малым временем корреляции (рис.2), то, как показал анализ результатов модельного эксперимента, среднее значение частоты при ее оценке последовательно по 2-м и 3-м отсчетам практически не отличается от 1 (1.004 и 1.007). В то же время среднеквадратичные отклонения оценки частоты составляет для двух отсчетов 19.5 %, а для трех существенно ниже (3.6 %). Это наглядно видно на графиках (масштаб на рис. 2(б) в 10 раз больше масштаба на рис. 2(а)).

Для доплеровской системы с относительно большим временем корреляции (рис. 4), как и следовало ожидать, оценка средних значений частоты также близка к 1, а среднеквадратичные отклонения существенно уменьшаются как для двух, так и для трех отсчетов (3.85 % и 1.27 % соответственно).

Полученные результаты сведены в Таблицу.

Таблица 1. Средние значения максимально правдоподобных оценок доплеровской частоты и их среднеквадратичные отклонения

Доплеровская система 1 Время корреляции – 3 допл. периода.			Доплеровская система 2 Время корреляции – 10 допл. периодов		
Период квантования	0.2 T _D	0.1 T _D	Период квантования	0.2 T _D	0.1 T _D
Число отсчетов матрицы	Оценки частоты (верхняя строка-среднее, нижняя –σ (%))		Число отсчетов матрицы	Оценки частоты (верхняя строка-среднее, нижняя –σ (%))	
2	1.004	1.01	2	0.998	0.998
	19.5 %	16.9 %		3.85 %	3.84 %
3	1.006	1.007	3	1.002	1.001
	3.6 %	3.5 %		1.27 %	1.26 %
4	1.005	1.006	4	-	-
	3.6 %	3.5 %		-	-

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Как следует из таблицы, средние значения полученных оценок весьма близки к 1 Гц, то есть полученные оценки не смещены.
2. При оценке частоты по двум смежным отсчетам доплеровского сигнала (пульсарный метод) ошибки достаточно велики – 19.5 % для первого анемометра с широким спектром и 3.85 % для второго с существенно более узким спектром. Использование 3-го отсчета существенно снижает погрешность. Для первого анемометра - снижение составляет 5 раз, а для второго - 3 раза. Использование 4-х отсчетов существенного выигрыша не дает.
3. Частота квантования сигнала существенного влияния на точность оценок не оказывает. Небольшое улучшение имеет место только в первом случае (для анемометра с широким спектром) и отсутствует во всех остальных.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$P(Z, \omega)$ - функция правдоподобия частоты доплеровского сигнала;

ω - круговая доплеровская частота, Гц;

Z – вектор-столбец комплексных отсчетов сигнала;

D – диагональная матрица с элементами $\exp(j\omega kT)$;

T – период дискретизации доплеровского сигнала, с;

k – номер дискретного отсчета корреляционной функции;

C – матрица огибающей корреляционной функции, нормированной на дисперсию сигнала;

$(C)^{-1}$ – обратная матрица корреляционной функции,

$R_L(kT), R_A(kT)$ - нормированные на дисперсию корреляционные функции сигналов доплеровского лидара и лазерного доплеровского анемометра, соответственно;

τ_n – длительность зондирующего импульса на уровне $\exp(-1)$ огибающей, с;

ξ - известный параметр оптической схемы анемометра, определяемый числом реальных или виртуальных интерференционных полос в его измерительном объеме;

x – параметр огибающей корреляционной функции сигнала;

$$x = \left(\frac{T}{\tau_n} \right) - \text{для лидара, и } x = \xi \omega T = \frac{\omega T}{2\pi M} \text{ для анемометра;}$$

M – число интерференционных полос на уровне $\exp(-1)$ огибающей корреляционной функции сигнала;

Z_0, Z_1 – соответствующие комплексные отсчеты сигнала, взятые с интервалом T ;

$\Delta\varphi = \arg(Z_0^* \cdot Z_1)$ – приращение фазы сигнала на интервале T между двумя отсчетами;

t_k – текущий k -й момент времени;

t_i – момент появления i -й рассеивающей частицы в центре измерительного объема;

T_D – период доплеровского сигнала;

N – число прошедших частиц;

j – мнимая единица

Индексы:

Звездочка (*) в индексе означает операцию комплексного сопряжения;

T^t – в верхнем индексе означает операцию транспонирования матрицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Miller K.S., Rochwarger M.M.** A Covariance Approach to Spectral Moment Estimation // IEEE Trans. Inf. Theory. 1972. IT-18, 5
2. **Lee R. et. al.** Improved Doppler velocity estimates by the poly-pulse method // 18 conf. Radar meteorology, Atlanta, GA, 1977.
3. **Chornoboy E. S.** Optimal Mean Velocity Estimation Doppler Weather Radars //, IEEE Transactions on geoscience and remote sensing. 1993. V.31, №3.
4. **Novak L.M.** On the estimation of spectral parameters using burst waveforms // MIT, Lincoln laboratory, (technical report), 1983.
5. **Zrnich D.S.** Estimation of Spectral Moments for Weather Echoes // IEEE Trans. Gesci.Electron. GE-17, 1979. № 4.

G.A. Kashcheeva, V.S. Sobolev

*Institute of Automation and Electrometry, Russian Academy of Sciences, Siberian Branch, Russia
630090, Novosibirsk, Acad. Koptug Ave., 1, E-mail: sobolev@iae.nsk.su*

MODELLING OF MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATES ALGORITHMS OF THE LASER DOPPLER SYSTEMS FREQUENCY AT FINITE NUMBER OF COUNTS

Algorithms of receiving maximum likelihood estimations of the laser Doppler systems signal frequency on two and three its complex readout and also the results of computer modelling of these algorithms are presented. It is shown, that estimations of frequency practically are not displaced, and addition of 3-rd readout essentially (in three-four times) increases accuracy of measurements.

LASER DOPPLER SYSTEMS, MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATIONS