Одиннадцатая Международная научно-техническая конференция
«Оптические методы исследования потоков»
Москва, 27 — 30 июня 2011 г.

УДК 535.36; 523.31; 519.6

В.П. Будак [1], Я.А. Илюшин [2], О.В. Шагалов [1]

[1] Московский энергетический институт (технический университет), Россия, 111250, Москва, Красноказарменная ул., 14, E-mail: BudakVP@mpei.ru
[2] Московский государственный университет им. М.В.Ломоносов, Россия, 119992, Москва, Ленинские горы, ГСП-2, E-mail: ilyushin@physics.msu.ru

ВЛИЯНИЕ РАЗОРВАННОЙ ОБЛАЧНОСТИ НА ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ АТМОСФЕРЫ ПРИ ОПТИЧЕСКОМ ДИСТАНЦИОННОМ ЗОНДИРОВАНИИ

Рассмотрено решение векторное уравнение переноса излучения (ВУПИ) для плоского облачного слоя с цилиндрическим отверстием. Сверху и снизу облака располагается атмосфера. Решение представляется в виде суммы анизотропной и регулярной частей. Анизотропная часть, содержащая все особенности, находится в малоугловой модификации метода сферических гармоник. Краевая задача для гладкой части решается методом конечных элементов на основе пространственной сетки в виде коаксиальных цилиндров соосно отверстию. ВУПИ представляется в виде интегрального уравнения Пайерлса, которое дискретезируется по методу дискретных ординат. Дискретные значения тела яркости хранятся в узлах сетки с аппроксимацией сплайном. Само ВУПИ решается методом итераций. Показано, что для большинства практически важных сцен количество итераций не превышает 10.

ТРЕХМЕРНЫЙ ПЕРЕНОС, АНИЗОТРОПНОЕ РАССЕЯНИЕ, ПОЛЯРИЗАЦИЯ

ВВЕДЕНИЕ

Повышение точности аппаратуры спутниковых систем оптического дистанционного зондирования (ОДЗ) в последние годы позволило перейти к решению принципиально новых задач по определению глобального распределения содержания малых газовых компонент, определению формы частиц аэрозоля. Например, требования к точности измерений концентрации CO_2 по программе GOSAT составляет менее 1% [1]. Поскольку все измерения подобных систем являются косвенными, то это приводит к изменению требований к точности решения уравнения переноса излучения. Прежде всего, это требует максимально полного включения в модель переноса излучения в среде всех существенных факторов: анизотропии рассеяния, истинного поглощения газовыми компонентами, поляризации, стратификации, отражения подложкой, неравномерность рельефа земной поверхности, и т.д.

В каждый момент времени как минимум половина планеты покрыта облаками, поэтому наблюдения приходится проводить в разрывы облаков. Облака оказывают существенное влияние на сигнал, и моделирование следует проводить именно на разорванной облачности. В частности, если размер разрыва облачности разрешается со спутника, то рассеяние на облаках приводит к подсветке и увеличению яркости, а если не разрешается, то увеличивается эффективное пропускание облачного слоя [2]. В том и другом случаях это снижает эффективную толщину облачного слоя, что в свою очередь снижает оценки концентрации частиц.

В задачах переноса в плоскослоистых средах отлично зарекомендовал себя метод решения уравнения переноса излучения (УПИ) с выделением анизотропной части решения на основе малоугловой модификации метода сферических гармоник (МСГ) [3-6]. Проведенное сравнение тестовых расчетов по указанному алгоритму с основными известными в мире программными реализациями решения УПИ в скалярном [7] и векторном [8] вариантах показало, что при одинаковой точности расчетов алгоритм с выделением анизотропной части имеет до двух порядков меньшее время счета. В задачах ОДЗ скорость счета имеет важнейшее значение: при восстановлении параметров среды используется фитинг решения с результатами измерений, что требует многократного решения прямой задачи. Отметим, что в гиперспектральных системах [1] используются десятки тысяч спектральных линий, что приводит к огромному объему вычислений.

Основу алгоритма составляет метод функций Грина, который для плоскослоистых сред приобретает вид пропагаторов и рассеивателей излучения в среде [9]. Обычно при вертикально-стратифицированной среде для решения УПИ используют матрично-операторный метод (МОМ) [10], при котором затраты линейно растут с увеличением числа слоев. Использование связи между пропагаторами и рассеивателями позволяет существенно сократить время счета многослойной модели. Этот же подход позволяет существенно ускорить скорость вычислений по алгоритму с выделением анизотропии [3-6]. При тестовом сравнении выявилось узкое звено метода: при наличии особенностей вне малоугловой сферы (радуга, например) алгоритм теряет присущую эффективность. Для устранения этого можно также воспользоваться представлением решения через пропагатор с малым числом потоков в методе дискретных ординат, а распределение у радуги искать с помощью метода итераций.

МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ ЧАСТИ РЕШЕНИЯ

Пусть плоский слой мутной среды облучается сверху бесконечно широким параллельным пучком света под углом θ_0 с нормалью к верхней границе. Введем декартову систему координат *OXYZ* с единичными векторами $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ вдоль соответствующих осей. Ось *OZ* направлена вертикально вниз перпендикулярно границам слоя. Здесь и далее символ крышечка “^” над векторами будет обозначать единичный вектор. Тогда для определения поляризации внутри слоя имеем следующую краевую задачу для ВУПИ:

$$\begin{cases} \mu \dfrac{\partial \vec{\mathrm{L}}(\tau,\hat{\mathbf{l}})}{\partial \tau} + \vec{\mathrm{L}}(\tau,\hat{\mathbf{l}}) = \dfrac{\Lambda}{4\pi} \oint \vec{\mathrm{S}}(\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}') \vec{\mathrm{L}}(\tau,\hat{\mathbf{l}}') d\hat{\mathbf{l}}'; \\ \vec{\mathrm{L}}(0,\hat{\mathbf{l}})\Big|_{\mu\geq 0} = \vec{\mathrm{L}}_0 \delta(\hat{\mathbf{l}}-\hat{\mathbf{l}}_0); \quad \vec{\mathrm{L}}(\tau_0,\hat{\mathbf{l}})\Big|_{\mu\leq 0} = \vec{0}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\vec{\mathrm{L}}(\tau,\hat{\mathbf{l}}) \equiv \left[I\, Q\, U\, V \right]^T$ – вектор-параметр светового поля внутри слоя на оптической глубине τ по направлению $\hat{\mathbf{l}} = \left[\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi,\, \sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi,\, \mu \right]$, $\mu = (\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{z}}) \equiv \cos\theta$, T – обозначает транспонирование, $\hat{\mathbf{l}}_0 = \left[\sqrt{1-\mu_0^2},\, 0,\, \mu_0 \right]$, $\mu_0 = (\hat{\mathbf{l}}_0,\hat{\mathbf{z}}) \equiv \cos\theta_0$. Интегрирование в (1) проводится по всем направлениям в пространстве. Матрица локального преобразования

$$\vec{\mathrm{S}}(\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}') = \vec{\mathrm{R}}(\hat{\mathbf{l}}\times\hat{\mathbf{l}}' \to \hat{\mathbf{l}}_0\times\hat{\mathbf{z}}) \vec{x}(\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}') \vec{\mathrm{R}}(\hat{\mathbf{l}}_0\times\hat{\mathbf{z}} \to \hat{\mathbf{l}}\times\hat{\mathbf{l}}') = \vec{\mathrm{R}}(\chi)\vec{x}(\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}')\vec{\mathrm{R}}(\chi'),\ \ \vec{\mathrm{R}}(\chi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\chi & \sin 2\chi & 0 \\ 0 & -\sin 2\chi & \cos 2\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

учитывает двойной поворот плоскости референции при рассеянии, $\vec{\vec{\mathrm{R}}}(\cdot)$ – ротатор, χ – двугранный угол между плоскостями $\hat{\mathbf{l}}\times\hat{\mathbf{l}}'$ и $\hat{\mathbf{l}}_0\times\hat{\mathbf{z}}$, $\vec{\vec{x}}(\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}')$ – матрица рассеяния, Λ – альбедо однократного рассеяния. Правая стрелка над символом обозначает вектор-столбец, левая – строку, двойная стрелка – матрицу. $\vec{\mathrm{L}}_0$ – вектор-параметр Стокса падающего излучения на верхней границе:

$$\vec{\mathrm{L}}_0 = E_0\begin{bmatrix} 1 \\ p\cos 2(\varphi-\varphi_0) \\ -p\sin 2(\varphi-\varphi_0) \\ q \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где E_0 – нормальная облученность, p – степень линейной поляризации, q – степень круговой поляризации, φ_0 – азимут поляризации падающего пучка.

Представим решение в виде суммы [3, 4, 5, 11] анизотропной по углу $\vec{\mathrm{L}}_a(\tau,\hat{\mathbf{l}})$ части, включающей все особенности, и плавной регулярной части $\vec{\mathrm{L}}_r(\tau,\hat{\mathbf{l}})$:

$$\vec{\mathrm{L}}(\tau,\hat{\mathbf{l}}) = \vec{\mathrm{L}}_a(\tau,\hat{\mathbf{l}}) + \vec{\mathrm{L}}_r(\tau,\hat{\mathbf{l}}). \tag{4}$$

Для определения анизотропной по углу части воспользуемся свойством медленного монотонного убывания углового спектра быстро изменяющейся по углу функции [4, 5, 11]. Наилучшим представлением для углового спектра является система функций, заданных на сфере направлений, которые являются собственными для интегрального оператора рассеяния [4, 5, 11]:

$$\vec{\mathrm{L}}_a(\tau,\hat{\mathbf{l}}) = \sum_{c=1,2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{4\pi}\sum_{m=0}^{k}(2-\delta_{0,m})\vec{\vec{\phi}}_c(m\varphi)\vec{\vec{\Pi}}_m^k(\mu)\vec{\vec{\mathrm{Z}}}_k(\tau)\vec{\vec{\Pi}}_m^k(\mu_0)\vec{\vec{\mathrm{D}}}_c\vec{\mathrm{L}}_0, \tag{5}$$

где $\phi_1(\varphi) = \mathrm{diag}\left(\cos\varphi,\ \cos\varphi,\ \sin\varphi,\ \sin\varphi\right)$, $\phi_2(\varphi) = \mathrm{diag}\left(-\sin\varphi,\ -\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ \cos\varphi\right)$,

$$\vec{\vec{\Pi}}_m^k(\mu) = \begin{bmatrix} \mathrm{Q}_k^m(\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{R}_k^m(\mu) & -\mathrm{T}_k^m(\mu) & 0 \\ 0 & -\mathrm{T}_k^m(\mu) & \mathrm{R}_k^m(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Q}_k^m(\mu) \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} &\mathrm{R}_k^m(\mu) = 0.5i^m(\mathrm{P}_{m,2}^k(\mu)+\mathrm{P}_{m,-2}^k(\mu)), \\ &\mathrm{T}_k^m(\mu) = 0.5i^m(\mathrm{P}_{m,2}^k(\mu)-\mathrm{P}_{m,-2}^k(\mu)), \\ &\mathrm{Q}_k^m(\mu) = \sqrt{\frac{(k-m)!}{(k+m)!}}\,\mathrm{P}_k^m(\mu), \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\vec{\vec{\mathrm{D}}}_1 = \mathrm{diag}\left(1, 1, 0, 0\right), \\ &\vec{\vec{\mathrm{D}}}_2 = \mathrm{diag}\left(0, 0, 1, 1\right), \end{aligned}$$

$\vec{\vec{\mathrm{Z}}}_k(\tau) = \exp\left\{-(\vec{\vec{1}}-\Lambda\vec{\vec{\chi}}_k)\tau/\mu_0\right\}$, $\mathrm{P}_k^m(\mu)$ – присоединенные полиномы Лежандра, $\mathrm{P}_{m,s}^k(\mu)$ - обобщенные сферические функции. χ_k – коэффициенты разложения так называемой «греческой матрицы» рассеяния [12]:

$$\vec{\vec{\chi}}_k = \begin{bmatrix} \alpha_{1k} & \beta_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_{2k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{3k} & \beta_2 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & \alpha_{4k} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} &\alpha_{1k} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} a_1(\mu)\mathrm{Q}_k^0(\mu)d\mu,\ \ \alpha_{2k} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\left(\mathrm{R}_k^2(\mu)a_2(\mu)+\mathrm{T}_k^2(\mu)a_3(\mu)\right)d\mu, \\ &\alpha_{3k} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\left(a_2(\mu)\mathrm{T}_k(\mu)+a_3(\mu)\mathrm{R}_k(\mu)\right)d\mu,\ \ \alpha_{4k} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} a_4(\mu)\mathrm{Q}_k^0(\mu)d\mu, \end{aligned}$$

для аэрозольной матрицы рассеяния

$$\vec{x}(\gamma)=\begin{bmatrix} a_1(\gamma) & b_1(\gamma) & 0 & 0 \\ b_1(\gamma) & a_2(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3(\gamma) & b_2(\gamma) \\ 0 & 0 & -b_2(\gamma) & a_4(\gamma) \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \beta_{1k} &= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} b_1(\mu)\mathrm{Q}_k^2(\mu)d\mu, \\ \beta_{2k} &= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} b_2(\mu)\mathrm{Q}_k^2(\mu)d\mu. \end{aligned}$$

Представим регулярную часть решения задачи в форме [4, 5, 11]

$$\mathrm{L}_r(\tau,\hat{\mathbf{l}})=\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_{0,m})\left[\phi_1(m\varphi)\vec{\mathrm{L}}_1^m(\tau,\mu)+\phi_2(m\varphi)\vec{\mathrm{L}}_2^m(\tau,\mu)\right], \tag{6}$$

что с учетом ортогональности $\phi_i(m\varphi)$, $i=1,2$ приведет ВУПИ к виду

$$\mu\frac{\partial\vec{\mathrm{L}}_c^m(\tau,\mu)}{\partial\tau}+\vec{\mathrm{L}}_c^m(\tau,\mu)=\frac{\Lambda}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\vec{\Pi}_k^m(\mu)\vec{\chi}_k\int_{-1}^{1}\vec{\Pi}_k^m(\mu')\,\vec{\mathrm{L}}_c^m(\tau,\mu')d\mu'+\vec{\Delta}(\tau,\mu),\ c=1,2, \tag{7}$$

где функция источников есть следствие невязки МСГ

$$\begin{aligned}\mu_0\vec{\Delta}_c^m(\tau,\mu_i)&=\sum_{k=m}^{K}(2k+1)(\mu_i-\mu_0)\vec{\Pi}_m^k(\mu_i)\,\vec{\mathrm{d}}_k\vec{Z}_k(\tau)\vec{\Pi}_m^k(\mu_0)\,\vec{\mathrm{D}}_c\vec{\mathrm{L}}_0\\ &+\sqrt{((K+1)^2-m^2)}\left[\vec{\Pi}_m^K(\mu_i)\,\vec{\mathrm{d}}_{K+1}\vec{Z}_{K+1}(\tau)\vec{\Pi}_m^{K+1}(\mu_0)-\vec{\Pi}_m^{K+1}(\mu_i)\,\vec{\mathrm{d}}_K\vec{Z}_K(\tau)\vec{\Pi}_m^K(\mu_0)\right]\vec{\mathrm{D}}_c\vec{\mathrm{L}}_0,\end{aligned} \tag{8}$$

$\vec{\mathrm{d}}_k=\vec{1}-\Lambda\vec{\chi}_k$, K – количество членов в разложении матрицы рассеяния.

Представляя интеграл рассеяния по гауссовой квадратуре и заменяя соответствующие функции матрицами и вектор-столбцами дискретных значений, приходим к матричному дифференциальному уравнению для регулярной части [4, 5, 11]

$$\frac{d\,\vec{\mathrm{L}}(\tau)}{d\tau}=-\vec{\mathrm{B}}\vec{\mathrm{L}}(\tau)+\vec{\mathrm{M}}^{-1}\,\vec{\Delta}(\tau),\quad \vec{\mathrm{B}}\equiv\vec{\mathrm{M}}^{-1}(\vec{1}-\vec{\mathrm{A}}\vec{\mathrm{W}}), \tag{9}$$

где $\mu_j^{\pm}=0.5(\zeta_j\pm1)$, ζ_j, w_j – нули и веса гауссовой квадратуры порядка $N/2$,

$$\vec{\mathrm{A}}\equiv\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=0}^{K}(2k+1)\vec{\Pi}_k^m(\mu_i^+)\vec{\chi}_k\vec{\Pi}_k^m(\mu_j^+) & \sum\limits_{k=0}^{K}(2k+1)\vec{\Pi}_k^m(\mu_i^+)\vec{\chi}_k\vec{\Pi}_k^m(\mu_j^-)\\ \sum\limits_{k=0}^{K}(2k+1)\vec{\Pi}_k^m(\mu_i^-)\vec{\chi}_k\vec{\Pi}_k^m(\mu_j^+) & \sum\limits_{k=0}^{K}(2k+1)\vec{\Pi}_k^m(\mu_i^-)\vec{\chi}_k\vec{\Pi}_k^m(\mu_j^-)\end{bmatrix},\ \vec{\mathrm{M}}\equiv\begin{bmatrix}\mu_i^+ & 0\\ 0 & -\mu_i^+\end{bmatrix},\ \vec{\mathrm{W}}\equiv\frac{\Lambda}{4}\begin{bmatrix}w_i & 0\\ 0 & w_i\end{bmatrix}.$$

Решение полученной системы уравнений имеет аналитический вид в матричной форме

$$-\vec{\mathrm{L}}(0)+\mathrm{e}^{\vec{\mathrm{B}}\tau_0}\vec{\mathrm{L}}(\tau_0)=\vec{\mathrm{J}},\quad \vec{\mathrm{J}}(\tau_0,\mu_0)\equiv\int_0^{\tau_0}\mathrm{e}^{\vec{\mathrm{B}}\tau}\vec{\mathrm{M}}^{-1}\,\vec{\Delta}(\tau,\mu_0)d\tau. \tag{10}$$

ПРОПАГАТОРЫ И РАССЕИВАТЕЛИ

Матричная экспонента представима в виде [13]

$$e^{\vec{B}\tau_0} = \vec{U} e^{\vec{\Gamma}\tau_0} \vec{U}^{-1}, \tag{11}$$

где $\vec{U}$ – матрица собственных векторов матрицы $\vec{B}$, $\vec{\Gamma} = \mathrm{diag}(\vec{\Gamma}_-, \vec{\Gamma}_+)$ – диагональная матрица собственных значений упорядоченных по возрастанию так, что $\vec{\Gamma}_- = -\vec{\Gamma}_+$.

Следовательно, уравнение можно переписать в виде

$$-\vec{U}^{-1}\vec{L}(0) + e^{\vec{\Gamma}\tau_0}\vec{U}^{-1}\vec{L}(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} e^{\vec{\Gamma}\tau}\vec{U}^{-1}\vec{M}^{-1}\vec{\Delta}(\tau,\mu_0)d\tau. \tag{12}$$

Проблема решения (12) связана с наличием как отрицательных $\vec{\Gamma}_-$, так положительных $\vec{\Gamma}_+$ экспонент в решении, что приводит к быстрому ухудшению обусловленности системной матрицы. Для устранения этого используется масштабное преобразование [13] – умножим уравнение (12) слева на матрицу

$$\vec{S} = \mathrm{diag}(\vec{1}, e^{-\vec{\Gamma}_+\tau_0}), \tag{13}$$

что приведет (12) к следующему матричному выражению

$$-\vec{S}\vec{U}^{-1}\begin{bmatrix}\vec{L}_+(0)\\ \vec{L}_-(0)\end{bmatrix} + \vec{H}\vec{U}^{-1}\begin{bmatrix}\vec{L}_+(\tau_0)\\ \vec{L}_-(\tau_0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{J}_-\\ \vec{J}_+\end{bmatrix}, \tag{14}$$

где $\vec{H} \equiv \vec{S}e^{\vec{\Gamma}\tau_0} = \mathrm{diag}(e^{\vec{\Gamma}_-\tau_0}, \vec{1})$, $\vec{J} \equiv \begin{bmatrix}\vec{J}_-\\ \vec{J}_+\end{bmatrix} = \vec{S}\int_0^{\tau_0} e^{\vec{\Gamma}\tau}\vec{U}^{-1}\vec{M}^{-1}\vec{\Delta}(\tau,\mu_0)d\tau$.

Если обозначить

$$\vec{U}^{-1} \equiv \begin{bmatrix}\vec{u}_{11} & \vec{u}_{12}\\ \vec{u}_{21} & \vec{u}_{22}\end{bmatrix},$$

то система уравнений (14) примет вид

$$-\begin{bmatrix}\vec{u}_{11} & \vec{u}_{12}\\ e^{-\vec{\Gamma}_+\tau_0}\vec{u}_{21} & e^{-\vec{\Gamma}_+\tau_0}\vec{u}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{L}_+(0)\\ \vec{L}_-(0)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}e^{\vec{\Gamma}_-\tau_0}\vec{u}_{11} & e^{\vec{\Gamma}_-\tau_0}\vec{u}_{12}\\ \vec{u}_{21} & \vec{u}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{L}_+(\tau_0)\\ \vec{L}_-(\tau_0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{J}_-\\ \vec{J}_+\end{bmatrix}. \tag{15}$$

Входящие в выражении (15) столбцы $\vec{L}_+(0)$, $\vec{L}_-(\tau_0)$ являются падающими на слой потоками и определяются граничными условиями, а $\vec{L}_-(0)$, $\vec{L}_+(\tau_0)$ являются искомым решением и определяют выходящие из слоя потоки: отраженный и прошедший. Решим систему (15) относительно выходящих из слоя потоков

$$\begin{bmatrix} \vec{L}_-(0) \\ \vec{L}_+(\tau_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{F}_- \\ \vec{F}_+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{R}_- & \vec{T}_- \\ \vec{T}_+ & \vec{R}_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{L}_+(0) \\ \vec{L}_-(\tau_0) \end{bmatrix}, \tag{16}$$

где $\begin{bmatrix} \vec{F}_- \\ \vec{F}_+ \end{bmatrix} = \vec{C} \begin{bmatrix} \vec{J}_- \\ \vec{J}_+ \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \vec{R}_- & \vec{T}_- \\ \vec{T}_+ & \vec{R}_+ \end{bmatrix} = \vec{C} \begin{bmatrix} \vec{u}_{11} & -e^{\vec{\Gamma}_- \tau_0} \vec{u}_{12} \\ e^{-\vec{\Gamma}_+ \tau_0} \vec{u}_{21} & -\vec{u}_{22} \end{bmatrix}$, $\vec{C} \equiv \begin{bmatrix} -\vec{u}_{12} & e^{\vec{\Gamma}_- \tau_0} \vec{u}_{11} \\ -e^{-\vec{\Gamma}_+ \tau_0} \vec{u}_{22} & \vec{u}_{21} \end{bmatrix}^{-1}$.

В соответствии с [9] выражение (16) является представлением решения через рассеиватели, в то время как (10) через пропагаторы. Важнейшее достоинство представления (16) является его инвариантность, что позволяет для расчета многослойных сред воспользоваться МОМ [10]. При этом два смежных слоя можно заменить одним слоем, описываемым выражением эквивалентным по форме (16), но с эффективными параметрами, выражающимися через параметры слоев. Рассмотрим случай двухслойной среды из двух смежных слоев

$$\begin{bmatrix} \vec{L}^1_- \\ \vec{L}^1_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{F}^1_- \\ \vec{F}^1_+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{R}_{1-} & \vec{T}_{1-} \\ \vec{T}_{1+} & \vec{R}_{1+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{L}^1_\downarrow \\ \vec{L}^1_\uparrow \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \vec{L}^2_- \\ \vec{L}^2_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{F}^2_- \\ \vec{F}^2_+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{R}_{2-} & \vec{T}_{2-} \\ \vec{T}_{2+} & \vec{R}_{2+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{L}^2_\downarrow \\ \vec{L}^2_\uparrow \end{bmatrix}, \tag{17}$$

где нижний индекс определяет принадлежность верхнему 1 или нижнему слою 2. Вертикальными стрелками обозначено падающее сверху или снизу на слой излучение.

Отметим, что поскольку слои соприкасаются друг с другом, то

$$\vec{L}^1_+ = \vec{L}^2_\downarrow \equiv \vec{L}_\downarrow, \quad \vec{L}^2_- = \vec{L}^1_\uparrow \equiv \vec{L}_\uparrow. \tag{18}$$

Разрешая полученную систему относительно отраженного $\vec{L}^1_-$ и прошедшего $\vec{L}^2_+$ излучений через падающее на систему излучение $\vec{L}^1_\downarrow$ и $\vec{L}^2_\uparrow$, получим:

$$\begin{bmatrix} \vec{L}^1_- \\ \vec{L}^2_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{F}^1_- + \vec{T}^1_- \vec{\alpha}_-^{-1} \left(\vec{R}^2_- \vec{F}^1_+ + \vec{F}^2_- \right) \\ \vec{F}^2_+ + \vec{T}^2_+ \vec{\alpha}_+^{-1} \left(\vec{F}^1_+ + \vec{R}^1_+ \vec{F}^2_- \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{R}^1_- + \vec{T}^1_- \vec{\alpha}_-^{-1} \vec{R}^2_- \vec{T}^1_+ & \vec{T}^1_- \vec{\alpha}_-^{-1} \vec{T}^2_- \\ \vec{T}^2_+ \vec{\alpha}_+^{-1} \vec{T}^1_+ & \vec{R}^2_+ + \vec{T}^2_+ \vec{\alpha}_+^{-1} \vec{R}^1_+ \vec{T}^2_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{L}^1_\downarrow \\ \vec{L}^2_\uparrow \end{bmatrix}, \tag{19}$$

где $\vec{\alpha}_- = \vec{1} - \vec{R}^2_- \vec{R}^1_+$, $\vec{\alpha}_+ = \vec{1} - \vec{R}^1_+ \vec{R}^2_-$.

Однако подобный подход приводит к ухудшению времени и точности счета программы. Можно предложить иной подход, основанный на свойстве инвариантности - пропагатор многослойной системы является последовательным произведением пропагаторов [9]:

$$\vec{P}(0,\tau_k) = \prod_{i=1}^{k} \vec{P}(\tau_{i-1},\tau_i) = \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \vec{B}_i (\tau_i - \tau_{i-1}) \right), \quad \vec{P}(\tau_{i-1},\tau_i) = e^{\vec{B}_i(\tau_i - \tau_{i-1})}. \tag{20}$$

Соответственно можно вычислить пропагатор всей многослойной системы и выразить связь распределений поля на границах по (10):

$$-\vec{L}(0) + \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \vec{B}_i (\tau_i - \tau_{i-1}) \right) \vec{L}(\tau_0) = \vec{J}\,, \tag{21}$$

где $\vec{\mathrm{J}}(\tau_0,\mu_0) \equiv \sum_{i=1}^{k} \exp\left(\sum_{j=1}^{i-1} \vec{\mathrm{B}}_j (\tau_j - \tau_{j-1}) \right) \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mathrm{e}^{\vec{\mathrm{B}}_i t} \vec{\mathrm{M}}^{-1} \vec{\Delta}(t,\mu_0) d\tau$.

Далее переход к рассеивателям по выражениям (11)–(16).

Сравнение программных реализаций различных алгоритмов решения ВУПИ [7, 8] показало высокую эффективность подхода с выделением анизотропной части решения. Однако при наличии «выступов» у элементов матрицы рассеяния в углах отличных от малоугловой области эта эффективность сильно падает. При этом роль таких локальных угловых экстремумов в общем балансе энергии невелика, а равномерная сходимость по углу оказывается низкой. Поэтому можно надеяться, что даже с малым числом потоков МДО интеграл рассеяния представляется достаточно точно, а исправить угловое распределение можно по первой итерации от решения.

Поскольку в этом случае уравнение (16) решено, то мы имеем задачу не с краевыми условиями, а начальными, что позволяет записать поле на произвольной глубине слоя:

$$\vec{\mathrm{L}}(\tau) = \mathrm{e}^{-\vec{\mathrm{B}}\tau} \left(\vec{\mathrm{J}}(\tau,\mu_0) + \vec{\mathrm{L}}(0) \right), \tag{22}$$

что позволяет подставить полученное соотношение в ВУПИ (7) и вычислить итерацию. Интеграл рассеяния вычисляется по гауссовой квадратуре того же порядка. Дополнительным достоинством данного подхода является вычисление угловых распределений поляризации под произвольным углом визирования.

РАЗОРВАННАЯ ОБЛАЧНОСТЬ

Примем следующую модель разорванной облачности: в бесконечном плоском стратифицированном слое среды в одном из слоев (далее, облако) существует цилиндрическое отверстие. В этом случае среда имеет трехмерную геометрию и ВУПИ не сводится к плоской краевой задаче (1). Поскольку угловые особенности носят локальный характер, то представление (4) сохраняет свое место. При расчете анизотропной части в МСГ примем приближение независимых пикселей – Independent Pixel Approximation (IPA) [14].

Регулярную часть решения будем искать методом конечных элементов. Для устранения проблем, возникающих при решении краевой задачи, перейдем к задаче с начальными условиями, представив решение в виде разложения по кратностям рассеяния – метод итераций. Для формулировки метода решения перейдем к интегральной форме уравнения переноса Пайерлса. Для простоты записи все рассуждения проведем в скалярном приближении. Векторное обобщение очевидно. Яркость в каждой точке цилиндра зависит от всех координат - $L = L(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}})$, поэтому мы имеем дело с полным УПИ.

$$(\hat{\mathbf{l}},\nabla)L(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) = -\varepsilon L(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) + \frac{\Lambda\varepsilon}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')L(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}')d\hat{\mathbf{l}}'. \tag{23}$$

Решение (23) представляем в виде суммы гладкой и острой части решения

$$L(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) = \tilde{L}(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) + L_a(\tau,\mu), \;\; \tau = \varepsilon z, \;\; \mu = (\hat{\mathbf{z}},\hat{\mathbf{l}}). \tag{24}$$

Тогда УПИ (23) принимает вид

$$(\hat{\mathbf{l}},\nabla)\tilde{L}(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) = -\varepsilon\tilde{L}(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) + \frac{\Lambda\varepsilon}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')\tilde{L}(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}')d\hat{\mathbf{l}}' + F(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}), \tag{25}$$

где функция источников

$$F(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) \equiv F(\tau,\mu,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{2k+1}{4\pi}F_k^m(\tau)\,\mathrm{Q}_k^m(\mu)\cos m\varphi\,. \tag{26}$$

Перепишем (25) в системе координат относительно луча

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \xi\hat{\mathbf{l}},\ \ (\hat{\mathbf{l}},\nabla) = \frac{d}{d\xi}, \tag{27}$$

где ξ – расстояние вдоль луча от точки исследуемой точки поля **R**.

Уравнение (25) в системе координат относительно луча можно записать как

$$\frac{d}{d\xi}\tilde{L}(\mathbf{R}+\xi\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}) = -\varepsilon\tilde{L}(\mathbf{R}+\xi\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}) + \Phi(\mathbf{R}+\xi\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}})\,, \tag{28}$$

где $\Phi(\mathbf{R},\hat{\mathbf{l}}) \equiv \frac{\Lambda\varepsilon}{4\pi}\oint x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')\tilde{L}(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}')d\hat{\mathbf{l}}' + F(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}})$.

Уравнение (28) можно формально решить, как линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\tilde{L}(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) = -L_a(\mathbf{r}-\zeta\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}})\,\mathrm{e}^{-\varepsilon\zeta} + \int_{-\zeta}^{0}F(\mathbf{r}-\xi\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}})\,\mathrm{e}^{\varepsilon\xi}\,d\xi +$$
$$+\frac{\Lambda\varepsilon}{4\pi}\int_{-\zeta}^{0}\oint x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')\tilde{L}(\mathbf{r}-\xi\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')d\hat{\mathbf{l}}'\,\mathrm{e}^{\varepsilon\xi}\,d\xi\,, \tag{29}$$

где ζ – расстояние вдоль луча до пересечения с границей цилиндра. Отметим, что на верхней границе, куда падает излучение $L_a(\mathbf{r}-\zeta\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}) \equiv 0$, а на нижней границе вычисляем по МСГ.

Представим решение для сетки из коаксиальных цилиндров для $\mathbf{r}_{ijk}$, где i – индекс по радиусу, j – по высотам, k – по азимуту. Интегрирование по телесному углу заменим гауссовой квадратурой

$$\oint x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')\tilde{L}(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}')d\hat{\mathbf{l}}' = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')\tilde{L}(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}')d\mu d\varphi \approx \sum_{q=1}^{N_q}\int_{-1}^{+1}x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}'_q)\tilde{L}(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}'_q)d\mu\Delta\varphi \approx$$
$$\approx \Delta\varphi\sum_{q=1}^{N_q}\sum_{p=1}^{N_p}x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}'_{pq})\tilde{L}(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}'_{pq})w_p\,, \tag{30}$$

где $\hat{\mathbf{l}}'_{pq} = \left\{\mu_p\cos\varphi_q,\,\mu_p\sin\varphi_q,\,\mu_p\right\}$, причем сетка по азимуту φ_q равномерная, по косинусу зенитного угла μ_p в соответствии с гауссовой квадратурой, w_p – веса квадратуры.

Следовательно, уравнение (29) принимает вид

$$\tilde{L}(\mathbf{r}_{ijk},\hat{\mathbf{l}}_{pq}) = \tilde{L}_{ijk}^{(0)} + \frac{\Lambda\varepsilon}{4\pi}\Delta\varphi\sum_{q'=1}^{N_q}\sum_{p'=1}^{N_p}x(\hat{\mathbf{l}}_{pq},\hat{\mathbf{l}}'_{p'q'})w_p\int_{-\zeta_{ijk,pq}}^{0}\tilde{L}(\mathbf{r}+\xi\hat{\mathbf{l}}_{pq},\hat{\mathbf{l}}'_{p'q'})\,\mathrm{e}^{\varepsilon\xi}\,d\xi\,, \tag{31}$$

где

$$\tilde{L}^{(0)}_{ijk,pq} = -L_a(\mathbf{r}_{ijk} - \zeta\hat{\mathbf{l}}_{pq}, \hat{\mathbf{l}}_{pq})\,\mathrm{e}^{-\varepsilon\zeta_{ijk,pq}} + \int\limits_{-\zeta_{ijk,pq}}^{0} F(\mathbf{r}_{ijk} - \xi\hat{\mathbf{l}}_{pq}, \hat{\mathbf{l}}_{pq})\,\mathrm{e}^{\varepsilon\xi}\,d\xi\,. \tag{32}$$

Рассматриваем случай нормального падения, поэтому выражение для функции источников (26) преобразуется в

$$F(\tau,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} F_k(\tau)\,\mathrm{P}_k(\mu)\,. \tag{33}$$

Значения функции источников (33) просчитываются в каждом узле сетки. Интегрирование по лучу в (31) и (32) проводится по формуле трапеций [8]:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{-\zeta_{ijk,pq}}^{0} F(\mathbf{r}_{ijk} - \xi\hat{\mathbf{l}}_{pq}, \hat{\mathbf{l}}_{pq})\,\mathrm{e}^{\varepsilon\xi}\,d\xi \approx \\ &\qquad \approx \frac{0+\zeta_{ijk,pq}}{n}\left(\frac{F_0\,\mathrm{e}^{\varepsilon\xi} + F_n\,\mathrm{e}^{\varepsilon\xi}}{2} + F_1\,\mathrm{e}^{\varepsilon\xi} + F_2\,\mathrm{e}^{\varepsilon\xi} + \ldots + F_{n-1}\,\mathrm{e}^{\varepsilon\xi}\right). \end{aligned} \tag{34}$$

Решать уравнение (31) будем методом итераций

$$\tilde{L}_{ijk,pq} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{L}^{(n)}_{jk,pq}\,, \tag{35}$$

$$\tilde{L}^{(n+1)}(\mathbf{r}_{ijk}, \hat{\mathbf{l}}_{pq}) = \frac{\Lambda\varepsilon}{4\pi}\Delta\varphi \sum_{q'=1}^{N_q}\sum_{p'=1}^{N_p} x(\hat{\mathbf{l}}_{pq}, \hat{\mathbf{l}}'_{p'q'})\,w_p \int\limits_{-\zeta_{ijk,pq}}^{0} \tilde{L}^{(n)}(\mathbf{r} + \xi\hat{\mathbf{l}}_{pq}, \hat{\mathbf{l}}'_{p'q'})\,\mathrm{e}^{\varepsilon\xi}\,d\xi \tag{36}$$

При вычислении интеграла по лучу используем гексагональную схему аппроксимации.

Тестирование программы проводилось на примере плоского слоя однородной мутной среды. Для расчетов углового распределения при оптической толщине слоя τ_0=5 с точностью не хуже 1% достаточно 8 итераций для отраженного излучения и 4 итераций для прошедшего.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Малоугловая модификация метода сферических гармоник позволяет выделить анизотропную часть решения ВУПИ и сформулировать краевую задачу для регулярной части. Поскольку регулярная часть решения является гладкой, медленно меняющейся функцией угловых переменных, то для ее нахождения в произвольной трехмерной геометрии среды можно воспользоваться методом конечных элементов. Для устранения проблем, связанных с решением краевой задачи, методом итераций можно перейти к решению задачи с начальными условиями с интегрированием уравнения вдоль луча. Интеграл рассеяния интерполируется по методу дискретных ординат. Дискретные значения ординат при этом хранятся в узлах пространственной сетки. Значения между узлами аппроксимируются.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\vec{\mathrm{L}}(\tau,\hat{\mathbf{l}}) \equiv \left[I\;Q\;U\;V\right]^T$ – вектор-параметр светового поля внутри слоя на оптической глубине τ ;

$\hat{\mathbf{l}} = \left[\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi,\ \sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi,\ \mu \right]$ – вектор направления визирования;

$\hat{\mathbf{l}}_0 = \left[\sqrt{1-\mu_0^2},\ 0,\ \mu_0 \right]$ – направление падения излучения Солнца на слой;

$\ddot{\mathrm{S}}(\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}')$ – матрица локального преобразования луча;

$\vec{\mathrm{R}}(\cdot)$ – ротатор;

$\ddot{x}(\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}')$ – матрица рассеяния;

Λ – альбедо однократного рассеяния;

$\mathrm{P}_k^m(\mu)$ – присоединенные полиномы Лежандра;

$\mathrm{P}_{m,s}^k(\mu)$ - обобщенные сферические функции

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Yokota T., et al.** A nadir-looking “SWIR” sensor to monitor CO_2 column density for Japanese “GOSAT” project // Proceedings of the Twenty-Fourth International Symposium on Space Technology and Science. Japan Society for Aeronautical and Space Sciences and ISTS, Miyazaki, 2004. P. 887.
2. **Chiu J.C., Marshak A., Knyazikhin Y., Pilewski P., and Wiscombe W.J.** Physical interpretation of the spectral radiative signature in the transition zone between cloud-free and cloudy regions // Atmospheric Chemistry and Physics. 2009. V.9. P. 1419–1430.
3. **Budak V.P., Kozelskii A.V., Savitskii E.N.** Improvement of the spherical harmonics method convergence at strongly anisotropic scattering // Atm Ocean Opt J. 2004. V.17. P. 28–33.
4. **Budak V.P. and Korkin S.V.** On the solution of a vectorial radiative transfer equation in an arbitrary three-dimensional turbid medium with anisotropic scattering // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. 2008. V.109. P. 220–34.
5. **Budak V.P., Klyuykov D.A., Korkin S.V.** Convergence acceleration of radiative transfer equation solution at strongly anisotropic scattering // In Light Scattering Reviews 5: Single Light Scattering and Radiative Transfer / Ed. A.A. Kokhanovsky. Springer Praxis Books, 2010. P. 147–204.
6. **Budak V.P., Klyuykov D.A. and Korkin S.V.** Complete matrix solution of radiative transfer equation for pile of horizontally homogeneous slabs // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. 2011. V.112. P. 1141–1148.
7. **Sokoletsky L.G. et al.** A comparison of numerical and analytical radiative-transfer solutions for plane albedo of natural waters // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. 2009. V.110. P. 1132–46
8. **Kokhanovsky A.A. et al.** Benchmark results in vector atmospheric radiative transfer // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. 2010. V.111. P. 1931–46.
9. **Flatau P.J., Stephens G.L.** On the fundamental solution of the radiative transfer equation // J Geophys Res. 1988. V.93. P. 11037–50.
10. **Twomey S., Jacobowitz H., Howell H.B.** Matrix methods for multiple-scattering problems // J. Atmos. Sci. 1966. V.23. P. 289–296.
11. **Будак В.П., Клюйков Д.А., Коркин С.В.** CIAO – программа моделирования поляризационных сигналов спектральных приборов дистанционного зондирования в системе океан-атмосфера // Изв. ВУЗов. Физика. 2010. Т.53, №9/3. С. 58–69.
12. **Herman M., Lenoble J.** Asymptotic radiation in a scattering and absorbing medium Original Research Article // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. 1968. V.8, No.1. P. 355–367.
13. **Karp, A.H., Greenstadt, J., Fillmore, J.A.** Radiative transfer through an arbitrary thick scattering atmosphere // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. 1980. V.24. P. 391–406.
14. **Cahalan R.F., Ridgway W., Wiscombe W.J., Bell T.L.** The Albedo of Fractal Stratocumulus Clouds // J. Atm. Sci. 1994. V.51. P. 2434–2455.

V.P. Budak [1], Ya.A. Ilyushin [2], O.V. Shagalov [1]

*[1] Moscow Power Engineering Institute (technical university), Russia
111250, Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14, E-mail: BudakVP@mpei.ru
[2] Lomonosov Moscow State University, Russia,
119992, Moscow, Leninskie Gory, GSP-2, E-mail: ilyushin@physics.msu.ru*

THE INFLUENCE OF BROKEN CLOUDINESS ON MEASUREMENT ACCURACY OF ATMOSPHERE OPTICAL PARAMETERS BY OPTICAL REMOTE SENSING

The solution of the vectorial radiative transfer equation (VRTE) for the slab with cylindrical hole is analyzed in the article. The atmosphere is located from above and below slab. The solution is represented as the sum of anisotropic and regular parts. The anisotropic part contained all the singularity is found by the small angle modification of the spherical harmonics method. The boundary value problem for the regular part is solved by the finite elements method on the basis of spatial mesh in the shape of coaxial cylinders in the shape of coaxial cylinders in alignment the hole. VRTE is represented in the form of Paierls integral equation, which is discretized by the discrete ordinate method. The discrete values of radiance are saved in the mesh nodes with the spline approximation. VRTE is solved by the successive order of scattering. It is shown that the number of iteration in the most practical cases does not exceed 10.

3D RADIATIVE TRANSFER, ANISOTROPIC SCATTERING, POLARIZATION