Одиннадцатая Международная научно-техническая конференция
«Оптические методы исследования потоков»
Москва, 27 — 30 июня 2011 г.

УДК 681.787

С.А. Тимохин

Учреждение Российской академии наук
Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения РАН, Россия,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1, E-mail: sobolev@iae.nsk.su

ОБЗОР МЕТОДОВ ОБРАБОТКИ СИГНАЛА В ЛИДАРАХ И ЛАЗЕРНЫХ ДОПЛЕРОВСКИХ АНЕМОМЕТРАХ

В работе приводится сравнительный обзор используемых на практике методов обработки сигнала в лазерных анемометрах и лидарах. Эти методы разделены на следующие группы: обработка во временной области, обработка в частотной области, корреляционная обработка, методы максимального правдоподобия. Приведены основные характеристики, отмечены их преимущества и недостатки.

ЛАЗЕРНЫЕ ДОПЛЕРОВСКИЕ АНЕМОМЕТРЫ, ЛИДАРЫ, ИЗМЕРЕНИЕ ЧАСТОТЫ

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются методы обработки сигнала в лазерных анемометрах и лидарах. Эти устройства представляют собой средства для бесконтактного получения и обработки информации об удаленных объектах с помощью оптических систем, использующих явления отражения света и его рассеивания в исследуемой среде[1-5]. В частности метеорологические лидары позволяют определить направление и скорость перемещения воздушных потоков в различных слоях атмосферы. Принцип действия лидаров основан на генерации коротких импульсов света лазера, регистрации и обработке отраженного от атмосферных аэрозолей сигнала с целью выделения информации о доплеровском смещении частоты. Аэрозоль переносится ветром, так что частота отраженного света смещается пропорционально скорости ветра. Это смещение определяется как $f_d = 2V/\lambda$, где f_d -доплеровское смещение частоты, λ – длина волны лазера, V-радиальная составляющая вектора скорости ветра. Смещение частоты положительно, когда объект движется к источнику и отрицательно, когда объект удаляется от источника.

Лазерные доплеровские анемометры, в отличие от лидаров, являются одним из основных средств, служащих для исследования потоков в гидроаэродинамическом эксперименте. Частота излучаемого и рассеянного света ($\approx 10^{14}$Гц) очень велика для электронных схем обработки. По этой причине для выделения доплеровской частоты используются методы гетеродинирования. Сигнал от точечной цели, находящейся на расстоянии R от лидара после преобразования приемником воспроизводит переданный сигнал

$$x(t) = A(t)\exp\left[j2\pi \cdot f_d \left(t - 2R/c\right)\right],$$

где A(t)- амплитуда сигнала.

Реальные цели в атмосфере состоят из многих рассеивателей, случайно расположенных в пространстве наблюдения. Поэтому принятый сигнал является реализацией случайного процесса

$$x(t) = \sum_i A_i(t) \exp[j 2\pi f_{di}(t - 2R_i / c)],$$

где i -номер индивидуальной частицы.

Каждая частица вносит в принятый сигнал вклад со своей амплитудой $A_i(t)$ и доплеровской частотой f_{di} с учетом расстояния ее от лидара R_i. Поскольку отраженный сигнал является результатом сложения рассеянного света от множества случайно расположенных в объеме наблюдения частиц, то согласно центральной предельной теореме он хорошо описывается случайным узкополосным нормальным процессом. Выборочная реализация такого процесса имеет вид синусоиды с медленно меняющимися амплитудой (огибающей) и фазой. В любой момент времени ее можно представить в комплексной плоскости вектором, который имеет мгновенную амплитуду $|B(t)|$ и фазу $\theta(t)$, определяемыми как мгновенный вектор суммы сигналов от отдельных рассеивателей . Тогда комплексный сигнал можно представить в виде

$$x(t) = a(t) + jb(t), \text{ где } a(t) = |B(t)| \cos \theta(t) - \text{синфазная,}$$

$$b(t) = |B(t)| \sin \theta(t) - \text{квадратурная компоненты.}$$

Понятие спектра мощности доплеровского сигнала является ключевым в обработке сигналов лидара и описывает мощность принятого сигнала как функцию доплеровской частоты в наблюдаемом объеме. Обычно принимают, что положительная доплеровская скорость соответствует направлению вектора скорости частиц от лидара . Пределы скорости v_{max} определены границами частоты Котельникова, соответствующей двум отсчетам на период обрабатываемого сигнала ,что предотвращает эффект наложения частот (элайзинг) .При интервале дискретизации обрабатываемого сигнала T_s ,так называемая «скорость Котельникова» равна $V_{\max} = \lambda / 4T_s$, где λ - длина волны лазера. Интервал [$-v_{max}$,$+v_{max}$] называют интервалом однозначной скорости или интервалом скорости Котельникова [6], и все возможные скорости расположены в этом интервале.

В дальнейшем будем считать, что на измеряемый сигнал накладывается белый шум, вызванный рядом факторов, таких как тепловой шум приемника, дробовой шум сигнала и фона. Ширина спектра доплеровского сигнала зависит от многих причин, таких как сдвиг ветра, турбулентность, дисперсия скорости частиц в разрешаемом объеме и др. Целью обработки является эффективное определение центральной частоты спектра, которая пропорциональна измеряемой скорости. Это означает, что вклады от помех и шума должны быть или минимизированы, или удалены на различных стадиях обработки. В ходе выполнения этой операции используются алгоритмы, улучшающие отношение сигнал/ шум с помощью фильтрации и усреднения. Критерием эффективности схемы обработки служит минимальная среднеквадратическая ошибка оценок основных параметров сигнала.

Все существующие методы обработки разделим в первом приближении на следующие группы: обработка во временной области, обработка в частотной области, корреляционная обработка и методы максимального правдоподобия.

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Счетно-импульсные методы измерения доплеровской частоты

Методы обработки этой группы построены на выделении информации о скорости путем подсчета числа выбросов сигнала за нулевой уровень. Сюда относятся счетно-импульсные методы, основанные на формировании интервалов времени, пропорциональных периоду сигнала, и последующим измерении доплеровской частоты, путем подсчета числа укладывающихся в них импульсов образцового генератора, или путем получения величин, обратных периоду.. К этой же группе относится измерение частоты путем подсчета импульсов за фиксированный интервал времени. В [1-2] описаны устройства для измерения частоты доплеровского сигнала, которые благодаря сравнительной простоте получили широкое применение в 80-90 г. в лазерных анемометрах. Существенным недостатком счетно-импульсных методов является их слабая помехозащищенность и, следовательно, низкая надежность устройств при малых отношениях сигнал/ шум. В настоящее время счетно-импульсные методы измерения частоты в лазерных доплеровских системах практически не используются.

Измерение мгновенной частоты

Широко применяется [7] метод измерения мгновенной частоты , основанный на формировании аналитического сигнала

$$x(t) = a(t) + jb(t),$$

где $a(t)$-синфазная,$b(t)$-квадратурная компоненты, и определении его мгновенной частоты, как производной полной фазы по времени

$$\omega(t) = d\theta(t)/dt = [a(t)\cdot b'(t) + a'(t)\cdot b(t)]/a^2(t) + b^2(t)$$

К преимуществам метода следует отнести простоту реализации. Недостатком является низкая помехозащищенность метода измерения.

Этот метод применяется в сочетании с системами автоматической подстройки частоты или фазы, в которых сигнал подвергается узкополосной фильтрации от сопровождающих его шумов и демодулируется. Соответствующие устройства являются следящими фильтрами.

ОБРАБОТКА СИГНАЛА В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

Обработка сигнала в частотной области на первом этапе предполагает определение его спектральной плотности мощности (СПМ). Различают два способа нахождения СПМ сигнала: прямой и косвенный. Прямой способ основан на вычислении квадрата модуля преобразования Фурье дискретной последовательности данных. Косвенные методы нахождения СПМ базируются на предварительном вычислении автокорреляционной функции сигнала и последующем определением СПМ с помощью алгоритмов дискретного преобразования Фурье. Каждый подход имеет свои достоинства и недостатки, но информационное содержание в них одинаково, поскольку спектр мощности квантованного сигнала и его автокорреляционная функция связаны парой дискретного преобразования Фурье (ДПФ)

$$S(nf_0) = \sum_{m=0}^{N-1} R(mT_s)\exp[-j2\pi nm/N],$$

$$R(mT_s) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S(nf_0)\exp[j2\pi nm/N],$$

где N - число отсчетов данных, $S(nf_0)$ - доплеровский спектр в кратных основной частоте $f_0 = 1/NT_s$ точках , $R(mT_s)$ - автокорреляционная функция в кратных интервалу квантования T_s моментах, T_s-интервал дискретизации сигнала по времени.

С появлением алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) предпочтение отдается прямым методам определения СПМ, основанным на вычислении квадрата модуля преобразования Фурье дискретной последовательности данных с последующим усреднением. Если усреднение не использовать, результат может быть неудовлетворительным, так как выборочный спектр, полученный по одной реализации сигнала, дает статистически несостоятельные оценки истинного спектра . Усреднение обеспечивает получение гладких и статистически устойчивых оценок по конечному числу отсчетов данных . Оценки СПМ , основанные на прямом преобразовании данных, называют периодограммами .Периодограмма P(f) определяется как

$$P(f) = 1/N \left| \sum_{k=0}^{N-1} h_k x_k \exp[-j2\pi fk] \right|^2 ,$$

где множитель h_k является «окном» или весовой функцией преобразования.

Используются три основных типа методов сглаживания выборочных спектров. В методе Даньелла периодограмма сглаживается путем усреднения ее значений по нескольким соседним спектральным частотам. В методе Бартлетта усреднение производится по ряду периодограмм, получаемых из неперекрывающихся сегментов исходной реализации данных. В методе Уэлча подход Бартлетта применяется к перекрывающимся сегментам и вводится окно данных для уменьшения смещения оценок спектра из-за эффекта просачивания. Метод Уэлча является самым популярным периодограммным методом спектрального оценивания [8].

Оценка центральной частоты спектра (доплеровской частоты) по номеру максимального спектрального коэффициента

Существует ряд способов определения оценки центральной частоты из вычисленной периодограммы. Первым шагом в каждом из них является грубая оценка средней частоты $f = k_m / NT_s$ по номеру максимального спектрального коэффициента. Затем в одном из них [6] вычисляется средняя частота по формуле

$$Nf_c = k_m / T_s + 1/PT_s \sum_{k_m - N/2}^{k_m + N/2} (k - k_m) S \bmod_N (k) ,$$

где P -суммарная по периодограмме мощность сигнала, $\mathrm{mod}_N(k)$ -остаток от деления k на N.

Этот способ оценки исключает для симметричных спектров смещение, обусловленное эффектом подмены частот (элайзинга). Известны методы оценки средней частоты, использующие параболические интерполяционные функции по трем или пяти точкам [9].

Оценка частоты по моментам спектральной плотности

Известно [6], что первые три момента спектральной плотности мощности доплеровского сигнала определяют следующие параметры атмосферы: мощность отраженного сигнала, среднюю доплеровскую скорость, ширину спектра скорости. Мощность отраженного сигнала, или нулевой момент спектра мощности, служит индикатором водности или интенсивности загрязнения атмосферы в объеме наблюдения. Средняя доплеровская частота, или первый момент спектра мощности, определяет среднюю радиальную скорость воздуха. Ширина спектра, т. е. корень квадратный из второго центрального момента спектра, служит мерой разброса скоростей (турбулентности) внутри разрешаемого объема. Если обозначить спектр мощности принятого сигнала как *S(f)*, то спектральные моменты определятся как $M_n = \sum_i f_i S(f_i)$.

Нулевой момент M_0 равен площади под *S(f)* и представляет общую мощность принятого сигнала и шума. Нормализованный первый момент равен средней частоте

$f_c = \sum_i f_i S(f_i) / \sum_i S(f_i)$, а средняя оцениваемая скорость ветра $v_c = \lambda f_c / 2$.

В реальных условиях доплеровский сигнал сопровождается шумами. В первом приближении их можно аппроксимировать нормальным белым шумом. Отметим, что этот шум смещает среднюю частоту спектра (скорость). На практике применяются различные способы уменьшения этого смещения, большинство из которых требует дополнительной обработки спектра мощности. Примером может служить применение пороговых устройств для выделения сигналов, превышающих некоторый заданный уровень шума.

Значение порогового уровня выбирается с учетом дисперсии спектральной плотности сигнала и отношения сигнал / шум (ОСШ). Величина порогового уровня может регулироваться в зависимости от значения ОСШ. В работе [10] приведены результаты численного моделирования такой схемы обработки. Они показали , что оценки среднего значения являются несмещенными для величины ОСШ большей 15 дб. Другой метод снижения влияния шума заключается в вычитании его спектральной плотности *B(f)* из спектральной плотности принятого сигнала S(f) и последующим вычислении среднего значения.

$$f_c = \sum_i f_i [S(f_i) - B(f_i)] / \sum_i [S(f_i) - B(f_i)] .$$

Спектральная плотность шума предварительно оценивается при отсутствии сигнала. В[10] показано, что оценка среднего значения является несмещенной даже при низких ОСШ.

МЕТОДЫ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ОБРАБОТКИ

Как было показано выше, центральная частота доплеровского сигнала может быть определена как первый нормированный момент его спектра. Ниже будет представлен метод оценки [10] этого параметра, основанный на свойствах характеристической функции случайных процессов.

Известно, что моменты случайных процессов могут быть определены через производные характеристических функций, которые по определению являются Фурье - образами совместной плотности вероятности этих процессов. С другой стороны, согласно теореме Винера–Хинчина, их спектральная плотность является Фурье – образом корреляционной функции. Если принять, что спектральная плотность процесса эквивалентна плотности вероятности его мгновенной частоты ,то его первый момент эквивалентен центральной (то есть доплеровской) частоте. Он может быт определен как первая производная характеристической функции доплеровского сигнала по времени в нуле. Роль характеристической функции при этом будет играть корреляционная функция доплеровского сигнала.

Оценка автокорреляционной функции вычисляется по отсчетам комплексного временного сигнала

$$R(m) = 1/(N-m) \cdot \sum_{k=0}^{N-m-1} x_k^* \cdot x_{k+m},$$

где m-сдвиг между отсчетами, N-число независимых пар отсчетов, x- комплексные отсчеты сигнала, x^*-комплексно сопряженная к x величина.

Комплексная автокорреляционная функция и n-й спектральный момент M_n связаны выражением [10] $M_n = R^{[n]}(0)/(j2\pi)^n$,

где $R^{[n]}(0) - n -$ я производная автокорреляционной функции при сдвиге m=0.

Отсюда следует, что оценка центральной частоты определяется как $f_c = dR(\tau)/d\tau\big|_{\tau=0}$. Тогда

$$f_c = 1/\pi \cdot arctg \sum_k \mathrm{Im}(x_{k+1} \cdot x_k^{\ *}) / \sum_k \mathrm{Re}(x_{k+1} \cdot x_k^{\ *}) .$$

МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНЫЕ ОЦЕНКИ ЧАСТОТЫ И ДРУГИХ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ ЛАЗЕРНЫХ ДОПЛЕРОВСКИХ СИСТЕМ. ГРАНИЦЫ РАО-КРАМЕРА.

Одночастичный режим рассеяния, прием методом подсчета числа фотоэлектронов

В [11] поставленная в заголовке задача решена для случая, когда в качестве мешающего фактора выступает дробовой шум самого доплеровского сигнала, имеющего следующий вид

$$\mathrm{I(t)} = \mathrm{A_0} \exp[-\xi^2 \omega_\mathrm{D}^2 (\mathrm{t} - \mathrm{t_0})^2][1 + \cos\omega_\mathrm{D}(\mathrm{t} - \mathrm{t_0})] \tag{1}$$

где A_0, ω_D и t_0 - соответственно неизвестные амплитуда, доплеровская частота, пропорциональная скорости рассеивающей частицы, и момент появления частицы в центре измерительного объема; ξ- известный параметр оптической схемы, равный обратному числу интерференционных полос в измерительном объеме ЛДИС.

Основным фактором, мешающим точной оценке параметров доплеровского сигнала в этой ситуации, является дробовой шум. В большинстве случаев применения ЛДИС никаких априорных сведений, относительно статистических характеристик оцениваемых параметров, не имеется, поэтому, наилучшим критерием поиска оптимальных оценок является достижение максимума функции правдоподобия для каждого из оцениваемых параметров. процессом.

Из теории фотоэффекта, известно, что электрический сигнал на выходе фотодетектора при изменяющейся интенсивности света представляет собой нестационарный поток электронов, скорость эмиссии которых пропорциональна интенсивности оптического сигнала. Если подсчитывать число электронов на заданном интервале времени, то вероятность получения n отсчетов на этом интервале Δt подчиняется закону Пуассона

$$\mathrm{P(n_i, \Delta t)} = \frac{(\lambda(\mathrm{t})_\mathrm{i} \cdot \Delta \mathrm{t})^{\mathrm{n_i}}}{\mathrm{n_i}!} \mathrm{e}^{-\lambda(\mathrm{t})_\mathrm{i} \Delta \mathrm{t}} \tag{2}$$

где $\lambda(t) = \dfrac{I(t)\chi}{h\nu}$, I(t) - интенсивность света, проинтегрированная по площади детектора, χ - его квантовая эффективность и $h\nu$ - энергия кванта света. Период квантования Δt выбран достаточно малым в сравнении с периодом наивысшей частоты в спектре I(t), поэтому значение I(t) на этом интервале можно считать неизменным.

Учитывая независимость пуассоновских случайных величин, совместную плотность вероятности (функцию правдоподобия) полученного сигнала (1) можно представить в виде произведения $P(n_i)$, т.е.

$$P(n_1,...,n_N) = \prod_{i=1}^{N} P(n_i, \Delta t) \tag{3}$$

где *N*-число отсчетов на интервале наблюдения $T=\Delta t \cdot N$. Как известно, максимально правдоподобные оценки находятся по критерию максимума логарифма функции правдоподобия

$$\ln P(n_1,...,n_N) = \sum_{i=1}^{N} [n_i (\ln \lambda_i + \ln \Delta t) - \ln(n_i!) - \lambda_i \Delta t] \tag{4}$$

Если продифференцировать (4) по, интересующему нас неизвестному параметру x, то получается следующее уравнение правдоподобия в обобщенном виде

$$\frac{d \ln P(n_1,...,n_N)}{dx} = \sum \left(\frac{n_i \lambda'_i}{\lambda_i} - \lambda'_i \Delta t \right) = 0 \tag{5}$$

где $\lambda' = \dfrac{d\lambda(t,x)}{dx}$.

Для случая, когда весь сигнал умещается на интервале наблюдения T, сумму $\sum_i \lambda'_i \Delta t$ можно заменить интегралом в бесконечных пределах, и тогда уравнение правдоподобия представляется в виде

$$\sum \frac{n_i \lambda'_i}{\lambda_i} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda' dt \tag{6}$$

Расписывая его для каждого из неизвестных параметров A_0, ω_D и t_0, получим соответствующую систему уравнений, решение которой даст оптимальные оценки каждого из параметров:

$$A_0^2 = \frac{\xi \cdot \omega_D}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{N} n_i \tag{7}$$

$$2\xi^2 \omega_D \sum_{i=1}^{N} n_i (t_i - t_0)^2 + \sum_{i=1}^{N} n_i (t_i - t_0) \mathrm{tg} \frac{\omega_D (t_i - t_0)}{2} = \frac{\sqrt{\pi} A_0}{\xi \omega_D^2} \tag{8}$$

$$2\xi^2 \omega_D^2 \sum_{i=1}^{N} n_i (t_i - t_0) + \sum_{i=1}^{N} n_i \omega_D \mathrm{tg} \frac{\omega_D (t_i - t_0)}{2} = 0 \tag{9}$$

К сожалению, эта система нелинейных уравнений аналитически не решается, однако существует множество приближенных или численных способов решения этой задачи.

Для того чтобы оценить эффективность полученных оценок, найдены границы Рао-Крамера. Показано, что минимальные относительные среднеквадратичные ошибки максимально правдоподобных оценок имеют вид

$$\frac{\sigma_{A_0}}{A_0} = \sqrt{\frac{\xi\omega_D}{A_0\sqrt{\pi}}}$$

$$\frac{\sigma_{\omega_D}}{\omega_D} = \sqrt{\frac{2\xi^3\omega_D}{A_0\sqrt{\pi}}} \tag{10}$$

$$\frac{\sigma_{t_0}}{t_0} = \sqrt{\frac{\xi}{t_0^2 A_0\omega_D\sqrt{\pi}}}$$

Максимально- правдоподобные оценки параметров одночастичного доплеровского сигнала в присутствии независимого белого нормального шума. Аналоговое детектирование

Решение поставленной задачи реализовано в работах [12, 13]. Неизвестными, подлежащими оценке параметрами, являются доплеровская частота ω_D, амплитуда A и момент прибытия частицы в центр измерительного объема t_0.

Известно [12], что реальная и мнимая части одночастичного доплеровского сигнала в присутствии шума имеют вид:

$$\operatorname{Re} Z = \sum_{k=-K}^{K} A\exp\left[-\xi^2\omega_D^2\left(t_k - t_0\right)^2\right]\cos\omega_D\left(t_k - t_0\right) + w\left(t_k\right) \tag{11}$$

$$\operatorname{Im} Z = \sum_{k=-K}^{K} A\exp\left[-\xi^2\omega_D^2\left(t_k - t_0\right)^2\right]\sin\omega_D\left(t_k - t_0\right) + \breve{w}\left(t_k\right), \tag{12.}$$

где $w(t)$ - независимый белый нормальный шум, $\breve{w}(t)$ - его Гильбертово преобразование.

Нормальный закон распределения значений белого шума позволяет представить функцию правдоподобия сигнала в виде:

$$L(\vartheta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{2K+1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=-K}^{K}\left[\left(X_k - \mu_k\right)^2 + \left(Y_k - \nu_k\right)^2\right]\right\} \tag{13}$$

где $2K+1 = N$ - число отсчетов на интервале наблюдения, $\vartheta = \left[\omega_D,\ t_0,\ A\right]^{\mathrm{T}}$ - вектор неизвестных параметров сигнала, σ^2 - дисперсия шума; μ_k и ν_k - действительная и мнимая компоненты доплеровского сигнала в отсутствии шума:

$$\mu(t) = A\exp\left[-\xi^2\omega_D^2\left(t - t_0\right)^2\right]\cos\omega_D\left(t - t_0\right) \tag{14}$$

$$\nu(t) = A\exp\left[-\xi^2\omega_D^2\left(t - t_0\right)^2\right]\sin\omega_D\left(t - t_0\right) \tag{15}$$

Максимально правдоподобные оценки находятся по критерию достижения максимума логарифма функции (3). Этот логарифм равен

$$\ln L(\vartheta) = C + \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=-K}^{K}\left[\left(2X_k\mu_k - \mu_k^2\right) + \left(2Y_k\nu_k - \nu_k^2\right)\right] \tag{16}$$

где $C = (2K+1)\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right) - \dfrac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{k=-K}^{K}\left(X_k^2 + Y_k^2\right)$ не зависит от оцениваемых параметров. Дифференцируя (16) по неизвестному параметру сигнала, можно получить обобщенное выражение для уравнений правдоподобия:

$$\frac{\partial \ln L(\vartheta)}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=-K}^{K}\left[\frac{\partial \mu_k}{\partial \vartheta}\left(X_k - \mu_k\right) + \frac{\partial \nu_k}{\partial \vartheta}\left(Y_k - \nu_k\right)\right].=0. \tag{17}$$

Расписывая (17) для каждого из неизвестных параметров ω_D, t_0 и A, получим соответствующую систему уравнений правдоподобия, решение которой даст оптимальные оценки каждого из параметров:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{Ah_T(\omega_D)}{2T}\frac{1}{\xi\omega_D^2} = \\
&= 2\xi^2\omega_D\sum_{k=-K}^{K}(t_k - t_0)^2\exp\left[-\xi^2\omega_D^2(t_k - t_0)^2\right]\left(X_k\cos\omega_D(t_k - t_0 - T/2) + Y_k\sin\omega_D(t_k - t_0 - T/2)\right) + \\
&+ \sum_{k=-K}^{K}(t_k - t_0 - T/2)\exp\left[-\xi^2\omega_D^2(t_k - t_0)^2\right]\left(X_k\sin\omega_D(t_k - t_0 - T/2) - Y_k\cos\omega_D(t_k - t_0 - T/2)\right)
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
&2\xi^2\omega_D\sum_{k=-K}^{K}(t_k - t_0)\exp\left[-\xi^2\omega_D^2(t_k - t_0)^2\right]\left(X_k\cos\omega_D(t_k - t_0 - T/2) + Y_k\sin\omega_D(t_k - t_0 - T/2)\right) + \\
&+ \sum_{k=-K}^{K}\exp\left[-\xi^2\omega_D^2(t_k - t_0)^2\right]\left(X_k\sin\omega_D(t_k - t_0 - T/2) - Y_k\cos\omega_D(t_k - t_0 - T/2)\right) = 0
\end{aligned} \tag{19}$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\xi\omega_D\frac{T}{h_T(\omega_D)}\sum_{k=-K}^{K}\exp\left[-\xi^2\omega_D^2(t_k - t_0)^2\right]\left(X_k\cos\omega_D(t_k - t_0 - T/2) + Y_k\sin\omega_D(t_k - t_0 - T/2)\right)\ , \tag{20}$$

где
$$h_T(\omega_D) = \sin\left(\frac{\omega_D T}{2}\right)\Big/\left(\frac{\omega_D T}{2}\right) \tag{21}$$

Эта система нелинейных уравнений к сожалению аналитически не решается, однако современные компьютерные технологии справляются с нею в доли секунды.

Качество оптимальных оценок, как известно, определяется границами Рао-Крамера, которые позволяют оценить минимальные дисперсии каждой оценки. Соответствующие им минимальные относительные среднеквадратичные отклонениям имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{\omega_D}}{\omega_D} &= \frac{2\sigma\xi}{A}\sqrt{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\xi\omega_D T}{\left(1+2\xi^2\right)}} \\
\frac{\sigma_{t_0}}{t_0} &= \frac{\sigma}{At_0}\sqrt{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\xi T}{\omega_D\left(1+\xi^2\right)}} \\
\frac{\sigma_A}{A} &= \frac{\sigma}{A}\sqrt{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\xi\omega_D T\frac{\left(1+3\xi^2\right)}{\left(1+2\xi^2\right)}}
\end{aligned} \tag{22}$$

АЛГОРИТМ МАКСИМАЛЬНО-ПРАВДОПОДОБНЫХ ОЦЕНОК ДОПЛЕРОВСКОЙ ЧАСТОТЫ (СКОРОСТИ) ДЛЯ МНОГОЧАСТИЧНОГО РЕЖИМА РАБОТЫ ЛАЗЕРНОЙ ДОПЛЕРОВСКОЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Высокочастотная часть многочастичного доплеровского сигнала в рассматриваемом случае имеет вид [11]:

$$i(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i \exp\left[-\xi^2\omega_D^2(t-t_i)^2\right]\cos\left[\omega_D(t-t_i)\right] = A(t)\cos\left[\omega_D t + \varphi(t)\right] \tag{23}$$

где $A_i(t)$ – амплитуды парциальных сигналов, $A(t)$ – амплитуда суммарного сигнала, ω_D – допплеровская частота, $\varphi(t)$ - случайная фаза, производная которой определяет значение фазового шума, N – общее число частиц, прошедших через измерительный объем за время наблюдения, $\xi = \sqrt{2}/\pi M$ – параметр оптической схемы, M – число интерференционных полос в измерительном объеме, отсчитанном на уровне $\exp(-2)$ максимума интенсивности. При большой концентрации рассеивающих частиц в силу центральной предельной теоремы теории вероятности, сигнал (1) можно считать нормальным случайным узкополосным процессом.

Мгновенная частота сигнала (1), несущая информацию об интересующей нас скорости, может быть определена в соответствии с известным алгоритмом

$$\omega(t) = \frac{U(t)V'(t) - V(t)U'(t)}{U^2(t) + V^2(t)} = \omega_D + \frac{d\varphi(t)}{dt} \tag{24}$$

где $U(t)$ и $V(t)$-квадратурные компоненты сигнала (23). Как следует из (24), мгновенная частота представляет собой аддитивную комбинацию собственно доплеровской частоты и фазового шума.

Как известно [12], дисперсия фазового шума $\dot{\varphi}(t)$ бесконечно велика, а его плотность вероятности не подчиняется нормальному закону. Ширина спектра фазового шума обычно шире спектра доплеровского сигнала и значительно шире спектра турбулентных или иных пульсаций скорости исследуемого объекта. В этой ситуации, учитывая большую ширину спектра фазового шума, можно считать, что статистические характеристики сигнала на выходе н.ч. фильтра после частотной демодуляции будут практически совпадать с характеристиками профильтрованного этим фильтром белого шума со спектральной плотностью, равной спектральной плотности фазового шума в нуле S(0).

Далее задачу оптимальной оценки доплеровской частоты будем решать для случая, когда в качестве н.ч. фильтра используется интегрирующая RC-цепь. Инерционные свойства этой цепи позволяют утверждать, что, в отличие от мгновенной частоты исходного допплеровского сигнала, профильтрованный после частотного демодулятора сигнал будет являться нормальным случайным процессом. В случае RC –фильтра первого порядка корреляционная функция сигнала на выходе фильтра примет вид

$$B(\tau) = \frac{S(0)\alpha}{4}\exp(-\alpha\tau) = 1.153\alpha\xi\omega_D \exp(-\alpha\tau)\,, \tag{25}$$

где $\alpha = \dfrac{1}{RC}$.

С учетом вышеизложенного задача оптимального определения доплеровской частоты (скорости) сводится к оценке значения сигнала неизвестной постоянной величины на фоне нормального шума с корреляционной функцией (25).

Если сигнал на выходе частотного дискриминатора обозначить $\omega(t)$, то в соответствии с (24)

$$\omega(t) = \omega_D(t) + \dot{\varphi}(t), \qquad (26)$$

где $\omega_D(t)$ – оцениваемая доплеровская частота, а $\dot{\varphi}(t)$ – значения фазового шума.

Выбирая интервал оценивания Т таким образом, чтобы доплеровская частота на интервале Т оставалась неизменной, можно утверждать, что спектральная плотность, корреляционная функция и дисперсия фазового шума на этом интервале также останутся неизменными. В этой ситуации, как известно [15, формула 1.3.4.], функционал совместной плотности вероятности значений сигнала (мгновенной частоты $\omega(t)$) будет иметь вид:

$$P[\omega(t)|\omega_D] = k\exp\left[-\omega_D\int_0^T \omega(t)\nu(t)dt - \frac{\omega_D^2}{2}\int_0^T \nu(t)dt\right] \qquad (27)$$

где k - нормировочный множитель, а $\nu(t)$ – решение интегрального уравнения вида:

$$\int_0^T B(\tau)\nu(t)dt = \omega_D \qquad (28)$$

Действуя далее традиционным путем, то есть, приравнивая производную логарифма выражения (27) по ω_D нулю, получим следующее уравнение правдоподобия для оценки доплеровской частоты

$$\int_0^T \omega(t)dt = \hat{\omega}_D T\,. \qquad (29)$$

Решая это уравнение, получим

$$\hat{\omega}_D = \frac{1}{T}\int_0^T \omega(t)dt\,. \qquad (30)$$

Чтобы охарактеризовать качество полученной оценки, найдем ее математическое ожидание и дисперсию. Математическое ожидание равно:

$$\langle\hat{\omega}_D\rangle = \left\langle\frac{1}{T}\int_0^T \omega(t)dt\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T [\omega_D + \langle\dot{\varphi}(t)\rangle]dt = \omega_D, \qquad (31)$$

так как для нормального узкополосного процесса с симметричным спектром, каким является многочастичный доплеровский сигнал, величина $\langle\dot{\varphi}(t)\rangle$ равна нулю. Таким образом, видим, что математическое ожидание оценки $\hat{\omega}_D$ не смещено.

Далее показано, что дисперсия оценки частоты имеет вид:

$$\sigma^2\left(\hat{\omega}_D\right) = \frac{2.306\xi\omega_D}{T}\left[1 - \frac{1}{\alpha T}\left(1 - e^{-\alpha T}\right)\right]. \qquad (32)$$

Если полоса пропускания сглаживающего фильтра, включенного после частотного дискриминатора, как это обычно делается, будет шире наивысшей частоты спектра изменений скорости, т.е. $\alpha T > 1$, то относительная среднеквадратичная ошибка, как это следует из (32), будет сравнительно большой и равной

$$\frac{\sigma_\omega}{\omega_D} = \left(\frac{2.306\xi}{\omega_D T}\right)^{0.5} \qquad (33)$$

Если, например, число интерференционных полос М выбрать равным 30 (то есть ξ= 0,015), а $\omega_D T = 2\pi \cdot 1000$, то σ_ω/ω_D = 0,23%.

МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНЫЕ ОЦЕНКИ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ СПЕКТРА ДОПЛЕРОВСКОГО СИГНАЛА

В большинстве применений спектрального анализа, таких, например, как лазерная доплеровская анемометрия или лидарные технологии, форма спектральной плотности получаемых сигналов известна. В этой ситуации для оптимальных по точности оценок центральной частоты, пропорциональной измеряемой скорости в доплеровских системах, можно с успехом воспользоваться результатами работы [16]. В ней выведены алгоритмы максимально правдоподобных оценок центральной частоты спектра сигналов и его ширины. Кроме того, выведены также выражения для вычисления границ Рао-Крамера, определяющих качество получаемых оценок. В качестве наблюдаемых координат автор использует амплитуды разложения в ряд Фурье выбранной реализации обрабатываемого сигнала.

В работе показано, что если

1. Сигнал является стационарным нормальным случайным узкополосным процессом с известной формой спектральной плотности мощности $p(f, f_c)$ с неизвестным, подлежащим определению параметром f_c.

2. Частная реализация сигнала наблюдается на конечном интервале времени 0 - T

3. Параметр f_c находится в известных пределах $f_{\min} \prec f_c \prec f_{\max}$

4. Для любого значения параметра f_c в указанных пределах спектр сигнала однозначно зависит от этого параметра.

5. Для всех значений параметра f_c существуют первая и вторая производные спектра мощности $p(f,f_c)$ по f_c,

то функция правдоподобия параметра f_c определяется квадратами модулей Фурье-коэффициентов сигнала (т.е. периодограммой).

Как известно, оптимальная оценка неизвестного параметра соответствует максимуму функции правдоподобия или максимуму ее логарифма. Исходя из этого, автор [16] показал, что максимально правдоподобная оценка f_c определяется путем максимизации следующего функционала

$$\int_{f_{\min}}^{f_{\max}} \Phi^*(f) \cdot p(f - f_c)\,df\,,$$

где Φ^* (f)–оценка спектральной плотности мощности сигнала (периодограмма), $p(f)$-известная форма его спектральной плотности, f и f_c -текущая частота и ее максимально правдоподобная оценка, а f_1 и f_2-границы интегрирования, выбранные симметрично относительно положения максимума полученной периодограммы.

Процедура получения максимально правдоподобных оценок центральной частоты при использовании дискретного преобразования Фурье (ДПФ) состоит в следующем – в начале выбирается реализация сигнала, затем с помощью ДПФ вычисляется спектр мощности , затем полученные значения и значения априори известной формы спектра мощности подставляются в дискретную свертку, эквивалентную вышеприведенному интегралу. В результате получают максимально правдоподобную оценку спектра. Теперь оптимальное значение доплеровской частоты можно определить по положению максимума этой спектральной плотности. Отметим, что, исходя из постулатов теории оптимального приема, полученная таким образом оценка имеет наименьшую погрешность из всех оценок, полученных другими методами

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Василенко Ю.Г., Дубнищев Ю. Н., Соболев В. С.** и др. Лазерные доплеровские измерители скорости. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1975. 164 с.

2. **Коронкевич В. П., Соболев В. С., Дубнищев Ю. Н.** Лазерная интерферометрия. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1983. 216 с.

3. **Дюррани Т., Грейтид К**. Лазерные системы в гидродинамических измерениях. М.: Энергия, 1980. 326 с.

4. **Дубнищев Ю. Н., Ринкевичус Б. С.** Методы лазерной доплеровской анемометрии. М: Наука, 1982. 303 с.

5. **Дубнищев Ю.Н.** Теория и преобразование сигналов в оптических системах. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2008. 403 с.

6. **Довиак Р., Зрнич** Д. Доплеровские радиолокаторы и метеорологические наблюдения. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1988. 512 с.

7. **Соболев В. С., Столповский А. А., Щербаченко А. М**.и др. Следящая лазерная доплеровская система на основе оптимальных оценок мгновенной частоты. // Автометрия. 2006. № 1. С 103-115.

8. **Марпл-мл. С. Л**. Цифровой спектральный анализ и его приложения. Москва: Мир, 1990. 546 с.

9. **Matovich D. and Tropea C**. Spectral peak interpolation with application to LDA signal processing. // Meas.Sci. Techn. 1991 vol. 2, pp. 1100-1106

10. **Sirmans D. and Bumgarner B**. Numerical comparison of five mean frequency estimators. // J. Appl. Meteorol. 1995 vol.14, pp. 991-1003

11. **Соболев В.С., Прокопенко М.Н**. Максимально правдоподобные оценки частоты и других параметров сигналов лазерных доплеровских систем, работающих в одночастичном режиме рассеяния. // Квантовая электроника 2000 №3 С. 30

12. **Sobolev V. S., Feshenko A. A**. Accurate Cramer-Rao Bounds for a Laser Doppler anemometer. // IEEE transactions on INSTRUMENTATION AND MEASUREMENT 2006 v 55, №2, p. 659.

13. **Соболев В.С**. Оптимальные оценки параметров оптических сигналов. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2011г. 134 с.

14. **Тихонов В. И**. Статистическая радиотехника. М: Сов. Радио, 1966. 678 с.

15. **Куликов Е. И**. Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех. М: Сов.Радио, 1968. 244 с.

16. **Levin M. J**. Power spectrum parameter estimation. // IEEE Trans. Inform. Theory. 1965 Vol. IT-11, p.100-107.

S. A. Timokchin

Institute of Automation and Electrometry, Russian Academy of Sciences, Siberian Branch, Russia,

630090, Novosibirsk, Acad. Koptyug Ave., 1, E-mail: sobolev@iae.nsk.su

SIGNAL PROCESSING TECHNIQUES REVIEW IN LIDAR AND LASER DOPPLER ANEMOMETER

This paper presents a comparative review of the conventional signal processing methods in laser anemometer and lidar. These methods are divided into the following groups: treatment in the time domain, frequency domain processing, correlation processing, the maximum likelihood method. The main characteristics are marked with their advantages and disadvantages.

LASER DOPPLER ANEMOMETER, LIDAR, FREQUENCY MEASUREMENT