



УДК 532.574.7; 681.78

Г.А. Кашеева

Учреждение Российской академии наук  
Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения РАН  
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1, E-mail: sobolev@iae.nsk.su

## ФАЗОВЫЙ СПОСОБ ОЦЕНКИ МГНОВЕННОЙ ЧАСТОТЫ ДОПЛЕРОВСКОГО СИГНАЛА. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ОШИБКИ

*Представлены сравнительные результаты оценки мгновенной частоты доплеровского сигнала по приращению фазы формируемых различными способами квадратурных сигналов на интервале, определяемом частотой квантования. Используется стандартная программа расчета текущей фазы сигнала и ее приращений на интервале квантования, исключается необходимость аналогового или компьютерного дифференцирования квадратурных компонент сигнала, уменьшается количество производимых расчетов, увеличивается быстродействие системы.*

МГНОВЕННАЯ ЧАСТОТА, АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИГНАЛ, ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА, ФАЗОВЫЙ СПОСОБ ОЦЕНКИ ЧАСТОТЫ

### ВВЕДЕНИЕ

Широкое использование современных вычислительных средств в лазерной доплеровской анемометрии (ЛДА) открывает новые возможности оценки мгновенной частоты доплеровского сигнала. В наиболее общем случае мгновенную частоту определяют как производную фазы по времени аналитического сигнала вида

$$Z(t) = A(t) \exp[-j\Psi(t)] = V(t) + jU(t) \quad (1)$$

где  $A(t)$  и  $\Psi(t)$  - амплитуда и фаза аналитического сигнала,  $V(t) = \operatorname{Re}[Z(t)]$  и  $U(t) = \operatorname{Im}[Z(t)]$  - соответственно, его вещественная и мнимая компоненты, сопряженные между собой по Гильберту, причем  $V(t)$  - исходный физический сигнал, а сопряженный сигнал можно получить из исходного, повернув начальные фазы всех его составляющих на  $\pi/2$ . Амплитуда, фаза и мгновенная частота аналитического сигнала могут быть определены как

$$A(t) = \sqrt{V^2(t) + U^2(t)} \quad (2)$$

$$\Psi(t) = \arctan[U(t)/V(t)] \quad (3)$$

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} [\Psi(t)] = \frac{U'(t)V(t) - V'(t)U(t)}{V^2(t) + U^2(t)} \quad (4)$$

Моделью доплеровского сигнала, как показано в [1, 2], является нормальный узкополосный процесс, который обычно представляют в виде квазигармонической функции с центральной (несущей) частотой  $\omega_0$ , случайной амплитудой  $A(t)$  и случайной составляющей фазы  $\varphi(t)$ . Следовательно, квадратурные компоненты  $V(t)$  и  $U(t)$  такого сигнала в его комплексном представлении запишутся, соответственно как

$$V(t) = A(t) \cos \Psi(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] \quad (5)$$

$$U(t) = A(t) \sin \Psi(t) = A(t) \sin [\omega_0 t + \varphi(t)] \quad (6)$$

Определение мгновенной частоты в соответствии с алгоритмом (4) требует наличия двух квадратурных компонент сигнала и их одновременного дифференцирования. Для аналоговых сигналов эта операция может быть осуществлена с довольно высокой точностью с помощью фазовращающих, дифференцирующих и фильтрующих цепей, и такая схема реализована в следящей системе [3]. Однако, широкое использование вычислительных устройств с дискретным отсчетом значений сигнала, предполагает выполнение большинства аналоговых операций на уровне компьютерных программ, причем дифференцирование (нахождение производных) для дискретных сигналов осуществляется методом конечных разностей, а получение квадратурных сигналов (поворот фазы на  $\pi/2$ ) – путем использования дискретного преобразования Гильберта. Анализ применения алгоритма (4) и метода конечных разностей показывает [4], что даже в случае чисто гармонических сигналов мгновенная частота  $\omega$  может быть определена без ошибки только при бесконечно малых значениях интервала квантования  $\Delta t$

$\left( \omega = \frac{\sin(\omega_0 \Delta t)}{\Delta t} \rightarrow \omega_0 \text{ при } \Delta t \rightarrow 0 \right)$ . Если же частота квантования (число отсчетов на период сигнала) не превышает 10 (т.е. интервал квантования  $\geq 0.1$  периода), то ошибки могут достигать десятки процентов, причем во всех случаях имеет место систематическая ошибка (постоянный отрицательный сдвиг мгновенной частоты от ее исходного значения). Для практических приложений такой способ нельзя считать приемлемым, поскольку обычное быстрое преобразование Фурье (БПФ) исходных дискретных отсчетов сигнала, требующее не более двух отсчетов на период наивысшей частоты спектра (теорема Котельникова), позволяет определять среднее значение частоты с несравненно более высокой точностью. Однако, существует и другой способ оценки мгновенной частоты, так называемый фазовый способ, который описан ниже.

## **ФАЗОВЫЙ СПОСОБ ОЦЕНКИ МГНОВЕННОЙ ЧАСТОТЫ ДОПЛЕРОВСКОГО СИГНАЛА**

Если мы имеем дискретные отсчеты двух квадратурных аналоговых сигналов вида (5) и (6), соответствующих исходному доплеровскому сигналу и его ортогональной компоненте, то среднее значение частоты на интервале квантования  $\Delta t = 1/f_{\text{кв}}$ , где  $f_{\text{кв}}$  - частота квантования, можно определить как отношение разности отсчетов фаз сигнала на границах интервала к длине самого интервала, т.е.

$$\omega_k = \frac{\Delta \Psi_k}{\Delta t} = \frac{\Psi_k - \Psi_{k-1}}{\Delta t} \quad (7)$$

где  $k$  - номер отсчета,

$$(\Psi_k - \Psi_{k-1}) = \arctan[U(t_k)/V(t_k)] - \arctan[U(t_{k-1})/V(t_{k-1})] - \quad (8)$$

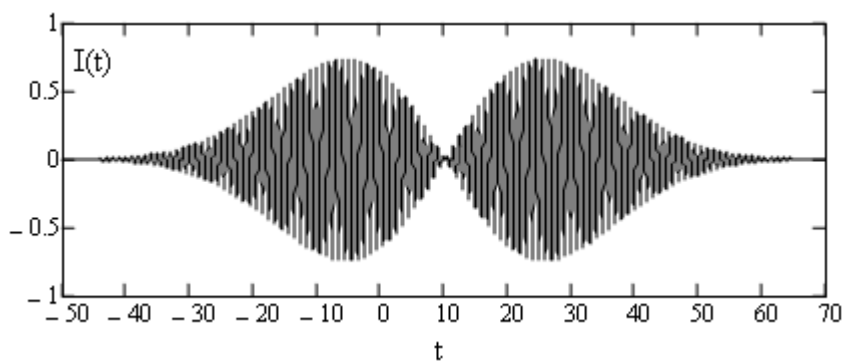
разность фаз двух последовательных отсчетов сигнала.

Фаза квазигармонического случайного процесса (5) состоит из детерминированной компоненты  $\omega_0 t$  и случайной компоненты  $\varphi(t)$ , скорость изменения которой значительно меньше  $\omega_0$ , и в течение одного интервала между отсчетами значение  $\varphi(t)$  можно полагать неизменным. Следовательно, фаза сигнала (5) изменяется во времени линейно в отличие от нелинейных функций  $\sin(x)$  и  $\cos(x)$ , а также их производных, входящих в выражение (4), и ее производная (частота) на заданном интервале есть величина постоянная.

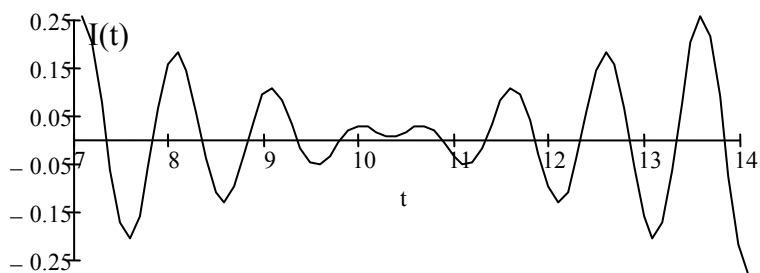
В качестве примера на Рис. 1 приведены: а) график сигнала, получаемого при наложении доплеровских сигналов от двух частиц, следующих в противофазе (случай, когда мгновенная частота, определяемая в соответствии с (4), уходит в бесконечность в момент  $t=10.25$ ); б) – центральная часть графика (а) в увеличенном масштабе, в) – изменение фазы сигнала во времени. Текущее значение фазы определялось в соответствии с (3), а значения  $U(t)$  и  $V(t)$  задавались выражениями, описывающими синусную и косинусную компоненты суммы двух сигналов одиночных частиц, следующих с одной и той же заданной скоростью. Следует отметить, что компьютерные программы обработки сигналов вычисляли не весь набег фазы, а только главное значение ее арктангенса (в частности, функция “ANGLE” программы Mathcad-14 определяет фазу в пределах  $0 \div 2\pi$ ). На графиках Рис.1 (в), (г) показаны скачки фазы и ее приращений ( $\Delta\varphi$ ) в пределах от  $-2\pi$  до  $2\pi$ . Если теперь определять текущее значение частоты в соответствии с (7), то при каждом скачке фазы также будет иметь скачок частоты. Подобное явление может быть исключено программным способом путем введения команды, добавляющей к разности фаз между последовательными отсчетами величины  $+2\pi$ , если приращение фазы (его абсолютное значение) превышает  $\pi$ , или добавления величины  $(-\pi)$  – если имеет место сложение противофазных или близких к ним сигналов, как в рассматриваемом случае.

Если с учетом сказанного скорректировать программу расчета приращений фазы сигнала, и рассчитать его частоту в соответствии с (7), то получим идеальное соответствие расчетной и заданной частоты на всем протяжении сигнала, даже в самом неприятном случае наложения противофазных сигналов (Рис. 1(д)).

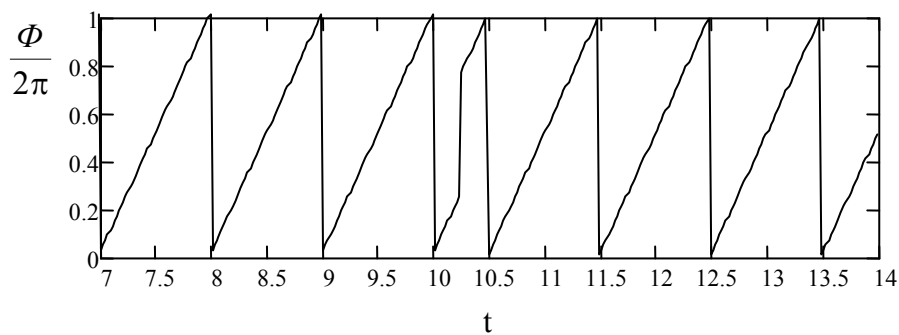
Следует отметить, что благодаря линейному изменению фазы в пределах интервала измерения, данный способ обеспечивает точный расчет частоты даже при низкой частоте квантования сигнала (порядка 2-3 отсчетов на период сигнала), в то время как непосредственная оценка мгновенной частоты в соответствии с алгоритмом (4) при нахождении производных методом конечных разностей является значительно более трудоемкой и ведет к значительным ошибкам при малой частоте квантования.



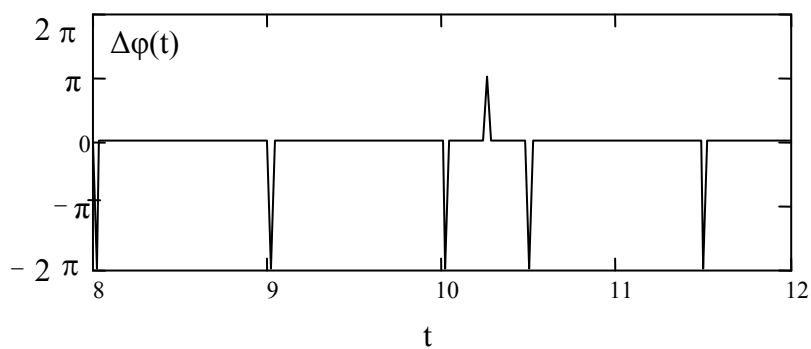
а)



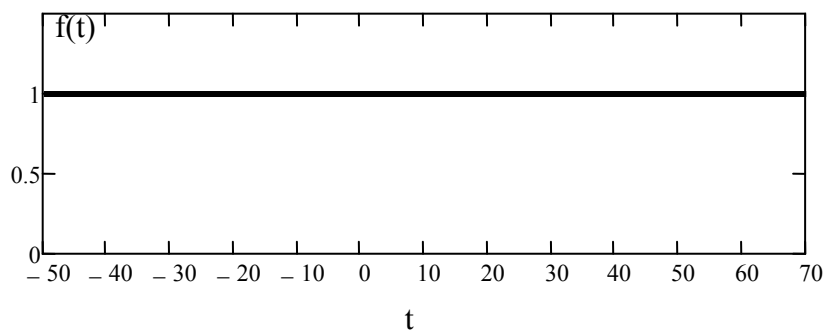
б)



в)



г)



д)

Рис. 1. а) Результирующий сигнал при наложении двух противофазных сигналов;  
 б) Центральная часть а) в увеличенном масштабе;  
 в) Изменение фазы в центральной части Рис. 1 (а) в компьютерном представлении.  
 г) Изменение приращений фазы на каждом интервале измерения.  
 д) График мгновенной частоты сигнала (а), рассчитанный по приращениям фазы с учетом коррекции ее скачков

На Рис. 2 (а), (б) и (в) приведены графики значений мгновенной частоты при наложении не противофазных, а произвольных сигналов при частотах квантования, соответственно, 5, 10 и 100 отсчетов на период сигнала. Черная прямая линия на графиках (линия 1) соответствует заданной частоте 1 Гц; кривая (2) соответствует значениям мгновенной частоты, рассчитанным методом конечных разностей в соответствии с алгоритмом (4); кривая (3) – мгновенная частота, рассчитанная фазовым методом в соответствии с алгоритмом (7).

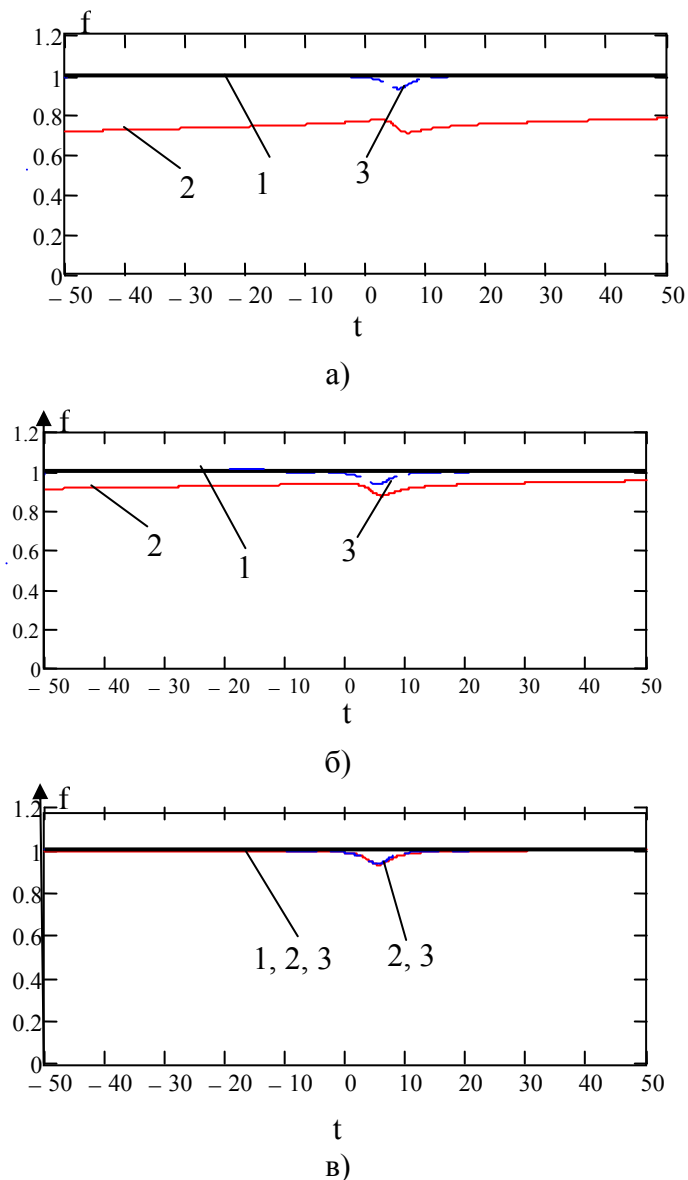


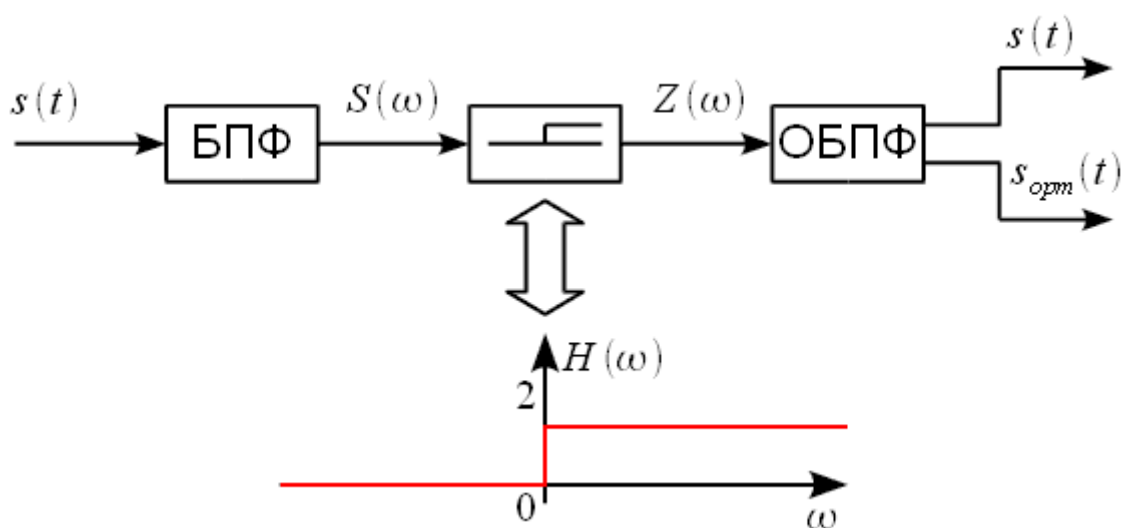
Рис. 2. Значения мгновенной частоты, при частотах квантования 5 (а), 10 (б) и 100 (в) отсчетах на период.

Как видно из Рисунка 2, только при очень высокой частоте квантования (порядка 100 отсчетов) метод конечных разностей, используемый для расчета производных в соответствии с алгоритмом (4), дает удовлетворительную точность (порядка 0.5 %) и является идентичным фазовому методу (кривые (2)-(3) на Рис.2 (в) практически сливаются). В то же время при низкой частоте квантования (Рис. 2 (а), (б)) фазовый метод обеспечивает высокую точность на всем интервале измерений, (кривые 3 и 1 практически везде совпадают), а метод конечных разностей (кривая 2) дает систематическую ошибку 30 % при частоте квантования 5 отсчетов и ошибку порядка 10 % при частоте квантования 10 отсчетов на период.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА В СОЧЕТАНИИ С ФАЗОВЫМ СПОСОБОМ ДЛЯ ОЦЕНКИ МГНОВЕННОЙ ЧАСТОТЫ ДОПЛЕРОВСКОГО СИГНАЛА

Характерной особенностью аналитического сигнала вида (1) является тот факт [5], что его спектр отличен от нуля только в области положительных частот, а при отрицательных частотах он равен нулю. В случае, когда аналитический сигнал используется для построения ортогонального дополнения исходного сигнала, выполняется следующая последовательность операций:

1. исходный сигнал подвергается преобразованию Фурье;
2. спектр в отрицательной области частот обнуляется;
3. спектр в положительной области частот удваивается;
4. берется обратное преобразование Фурье от полученной дискретной последовательности спектральных компонент;
5. в результате получится аналитический сигнал, из которого можно выделить исходный сигнал и его ортогональное дополнение. Такая процедура легко реализуется в цифровом виде, при помощи схемы представленной на рисунке 3.



$s(t)$  - исходный дискретный сигнал; БПФ- блок быстрого преобразования Фурье;  $S(\omega)$  - спектр Фурье,  $Z(\omega)$  - спектр в положительной области частот;  $H(\omega)$  - удвоенное значение спектра Фурье в положительной области («спектр Гильберта»); ОБПФ – блок обратного преобразования Фурье;  $s_{орт}(t)$  – ортогональное дополнение сигнала  $s(t)$ , т.е. его преобразование Гильберта.

Рис.3: Расчет аналитического сигнала в цифровом виде при помощи БПФ:

В компьютере указанная последовательность операций реализуется одной функцией «**hilbert**» программного комплекса “Mathcad 14”. Как следует из приведенного алгоритма, для выполнения преобразования Гильберта требуется обработка всей реализации сигнала, т. е. в реальном масштабе времени оно неосуществимо. Кроме того, блок, реализующий преобразование Гильберта, не является идеальным фазовращателем на  $90^\circ$ , и на начальном и конечном отрезках полученной реализации возникают существенные ошибки. Если далее применить фазовый способ - алгоритм (7) –(8) для расчета мгновенной частоты сигнала, рассматривая полученные данные преобразования Гильберта как значения  $U(t_k)$  в (8), получим реализацию мгновенной частоты, показанную на Рис. 4. Как видно из рисунка, на начальном участке реализации, длиной приблизительно 40 периодов исходного сигнала, имеют место существенные ошибки при определении мгновенной частоты. Кроме того, выполнение преобразования Гильберта при большой длине реализации требует достаточно

много времени. При этом, в центральной части реализации обеспечивается высокая точность оценки частоты, сравнимая с точностью, показанной на Рис. 2 (а) (кривая 3).

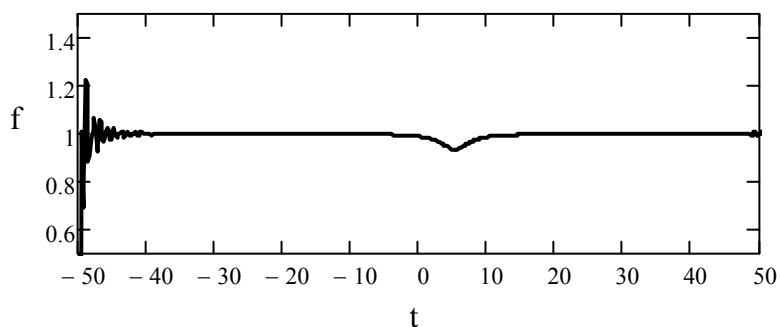


Рис.4. График изменения мгновенной частоты, рассчитанной через преобразование Гильберта, при частоте квантования 5 отсчетов на период

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены сравнительные результаты оценок мгновенной частоты доплеровского сигнала по приращению фазы формируемых различными способами квадратурных сигналов на интервале, определяемом частотой квантования. Рассматриваются случаи формирования аналитического комплексного сигнала (с использованием дискретного преобразования Гильберта от его вещественной компоненты) и комплексного сигнала, образованного непосредственным поворотом на  $90^0$  фазы его вещественной компоненты (с использованием аналоговой фазовращающей цепи). Показано, что фазовый способ оценки мгновенной частоты имеет несомненные преимущества перед способом ее оценки методом конечных разностей с использованием алгоритма (4), так как позволяет при минимально допустимой частоте квантования получать высокую точность. Данный способ использует стандартную программу расчета текущей фазы сигнала, исключает необходимость аналогового или компьютерного дифференцирования его ортогональных компонент, уменьшает количество производимых расчетов и увеличивает быстродействие системы. Использование стандартной программы, выполняющей преобразование Гильберта для получения квадратурной компоненты сигнала, не обеспечивает работы в реальном времени, так как требует информации обо всей реализации сигнала, но эта программа может быть использована для анализа записанных ранее реализаций исходного сигнала и оценки мгновенной частоты в центральной части реализации с точностью, аналогичной полученной для квадратурных компонент аналоговых сигналов с использованием фазового метода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Коронкевич В.П., Соболев В.С., Дубнищев Ю.Н.** Лазерная интерферометрия. Наука, Новосибирск, 1982. 235 с.
2. **Дубнищев Ю.Н., Ринкевичус Б.С.** Методы лазерной доплеровской анемометрии. М.: Наука, 1982, 303.
3. **Соболев В.С., Столповский А.А., Щербаченко А.М., Кащеева Г.А., Уткин Е.Н.** Следящая лазерная доплеровская система на основе оптимальных оценок мгновенной частоты // Автометрия. 2006. **42**. № 1. С. 103-115
4. **Кащеева Г.А.** Анализ факторов, влияющих на оценку мгновенной частоты аналитического сигнала // Автометрия. 2005. **41**, № 4. С. 114-127.
5. **Сергиенко А.Б.** Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2002. 608 с.

G.A. Kashcheeva

*Institute of Automation and Electrometry, Russian Academy of Sciences, Siberian Branch, Russia,  
630090, Novosibirsk, Acad. Koptyug Ave., 1, E-mail: galabr@iae.nsk.su*

**PHASE METHOD FOR EVALUATION OF DOPPLER SIGNAL INSTANTANEOUS  
FREQUENCY. DISCRETE HILBERT TRANSFORM AND RELATED ERRORS**

*The comparative results of the Doppler signal instantaneous frequency estimates are presented based on the phase increment calculation at the interval determined by the sampling rate for two quadrature signals formed in different ways. The method uses a standard program of the signal phase current value calculation, eliminates the need for an analog or computer differentiation of its quadrature components, reduces the amount of performed calculations and increases system performance.*

INSTANTANEOUS FREQUENCY, ANALYTICAL SIGNAL, DISCRETE HILBERT  
TRANSFORM, PHASE INCREMENT METHOD