

УДК: 535.31:681.7.001

И.Л. Расковская

Московский энергетический институт (технический университет), Россия,  
111250, Москва, Красноказарменная ул., 14.

## ВОЛНОВЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ЛАЗЕРНОЙ РЕФРАКТОГРАФИИ

Проведено моделирование рефрактограмм структурированного лазерного излучения на основе волновых методов. Для получения расчетных рефрактограмм в объеме сферического и плоского слоев применен спектральный метод, для моделирования в плоскости наблюдения использована формула Грина.

### РЕФРАКТОГРАММА, ВОЛНОВОЙ МЕТОД, ФОРМУЛА ГРИНА

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

Метод лазерной рефрактографии позволяет осуществлять визуализацию и количественную диагностику оптически неоднородных сред [1 – 2]. Математическое моделирование рефракционных картин (рефрактограмм), получаемых при зондировании исследуемой среды структурированными [3] лазерными пучками, является основополагающим этапом при проведении количественной диагностики.

Геометрооптические модели рефрактограмм использовались для решения обратных задач восстановления показателя преломления, температуры, и солености в различных средах [4 – 8]. Однако, при наличии сложной лучевой картины, формировании каустик (рис. 1) и необходимости учета дифракционных эффектов, геометрооптический подход оказывается несостоятельным и требуется применение волновых методов [9 – 10].

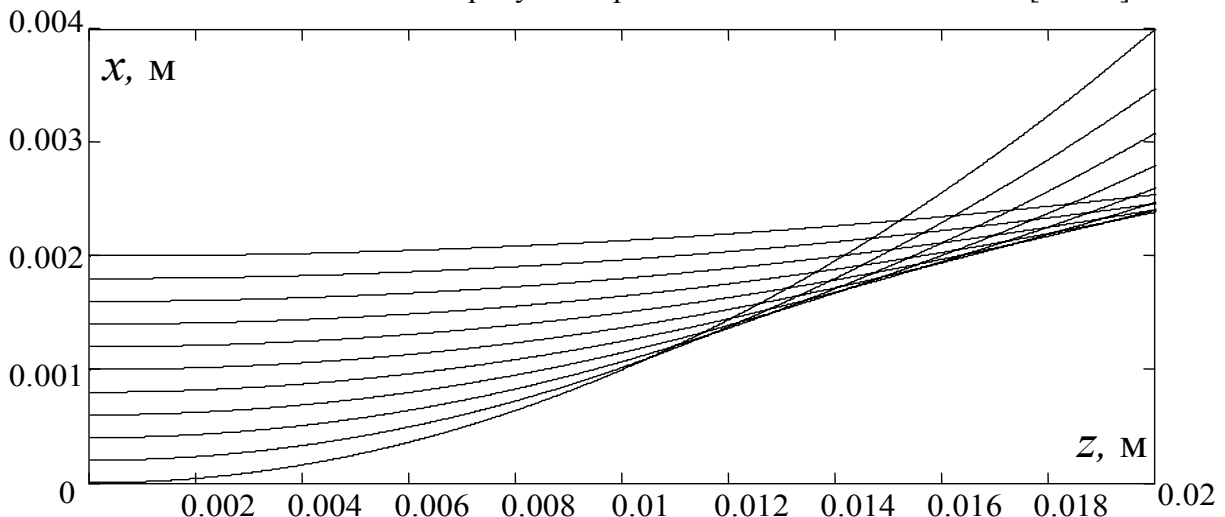


Рис. 1. Траектории геометрооптических лучей в плоском экспоненциальном слое

Моделирование распространения структурированных пучков в соответствии с рис. 2, следует проводить на трех участках: в свободном пространстве от источника излучения до неоднородности, внутри неоднородности и в свободном пространстве от неоднородности до плоскости наблюдения (экрана, на котором наблюдается экспериментальное

рефракционное изображение). В исходной постановке задачи будем считать, что поле на входе в неоднородность полностью определяется известными характеристиками пучка от источника структурированного излучения [3]. Поэтому задача сводится к рассмотрению распространения пучка непосредственно в неоднородной среде и от выхода из неоднородной среды до плоскости наблюдения.

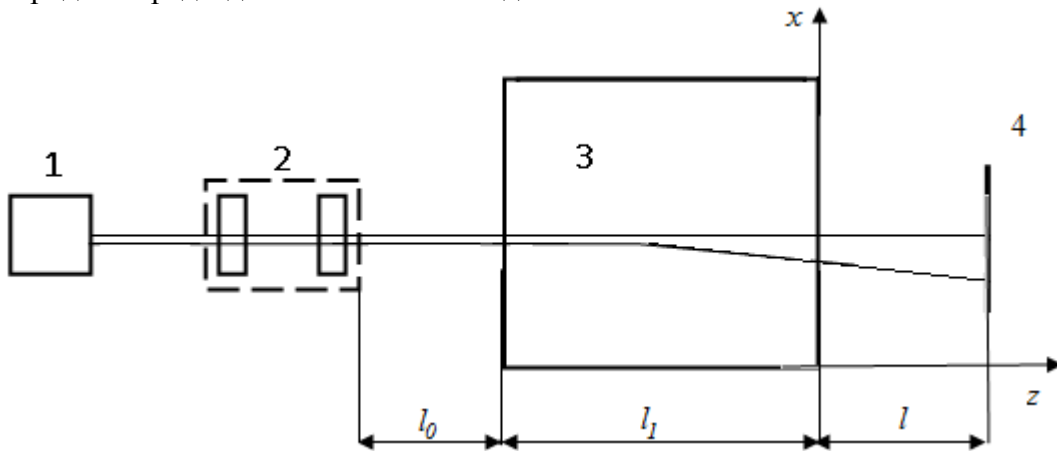


Рис. 2. Распространение зондирующего неоднородность структурированного пучка от источника до плоскости наблюдения: 1 – лазер, 2 – оптическая система формирования СЛИ, 3 – неоднородная среда, 4 – экран в плоскости наблюдения

Распространение пучка в неоднородной среде описывается уравнением Гельмгольца, которое при ряде допущений может быть сведено к параболическому [9] и решено численными методами. Альтернативой такому подходу является использование спектрального метода, идея которого была предложена в [10] для описания распространения лазерного пучка в среде с акустическим полем. В данной работе указанный метод используется для нахождения поля пучка в температурном пограничном слое. Преимуществом его является возможность получения приближенного решения в аналитической форме, что дает возможность решения обратной задачи без использования трудоемких вычислительных методов.

## 2. ПРИМЕНЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО ПОДХОДА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА В СЛАБОНЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Лазерные пучки для любого типа СЛИ могут быть представлены в виде пространственного (углового) спектра, определяемого данным видом ДОЭ [3]. Распространение каждой пространственной гармоники в неоднородной среде может рассматриваться независимо и в соответствии с принципом суперпозиции интегрироваться на выходе из среды [10]. Ниже рассмотрена математическая модель распространения лазерного пучка в неоднородной среде, соответствующая такому подходу.

Рассмотрим лазерный пучок, распространяющийся в направлении оси  $OZ$ , в среде с показателем преломления  $n_0$ . Пусть  $E(x, y, 0)$  – комплексная амплитуда поля пучка при  $z = 0$  на входе в среду. Требуется определить поле  $E(x, y, z)$  в среде в точке наблюдения  $(x, y, z)$ . Произведем двумерное фурье-преобразование функции  $E(x, y, 0)$ :

$$E(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_0(k_x, k_y) \exp[i(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y, \quad (1)$$

где  $k_x$  и  $k_y$  – компоненты волнового вектора  $\mathbf{k}$ ,

$$F_0(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x, y, 0) \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy \quad (2)$$

– угловой (пространственный) спектр функции  $E(x, y, 0)$ . Если угловой спектр  $F(k_x, k_y, z)$  известен при любом  $z$ , то искомая функция  $E(x, y, z)$  определяется выражением [9]

$$E(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k_x, k_y, z) \exp[i(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y. \quad (3)$$

Поскольку функция  $E(x, y, z)$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta E + k^2 E = 0, \quad (4)$$

то, подставляя (3) в уравнение (4), получаем дифференциальное уравнение для функции  $F(k_x, k_y, z)$ :

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + (k^2 - k_x^2 - k_y^2) F = 0. \quad (5)$$

Решая это уравнение при условии  $F(k_x, k_y, 0) = F_0(k_x, k_y)$ , найдем частное решение, соответствующее волне, распространяющейся в положительном направлении оси OZ,

$$F_0(k_x, k_y, z) = F_0(k_x, k_y) \exp\left(iz \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}\right). \quad (6)$$

Угловой спектр, по мере удаления точки наблюдения от входа в среду, изменяется, что связано со сдвигом фаз между различными спектральными компонентами (плоскими волнами, распространяющимися под разными углами к оси OZ). Рассмотрим, как распространяется волновой пучок с узким угловым спектром, т.е. пучок, ширина которого значительно больше длины оптической волны. Это означает, что поперечные компоненты волнового вектора  $k_x$  и  $k_y$  малы по сравнению с его абсолютной величиной  $k$ .

В этом случае в экспоненте (6) выражение  $\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$  можно разложить в ряд, сохранив лишь квадратичные по  $k_x$  и  $k_y$  члены. Тогда, согласно (3) пучок будет описываться функцией

$$E(x, y, z) = e^{ikz} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_0(k_x, k_y) \exp[i(k_x x + k_y y)] \exp\left[-\frac{iz}{2k}(k_x^2 + k_y^2)\right] dk_x dk_y = e^{ikz} A(x, y, z), \quad (7)$$

где  $A(x, y, z)$  – амплитуда волны и, в соответствии с (2)

$$F_0(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(\xi, \eta, 0) \exp(-i(k_x \xi + k_y \eta)) d\xi d\eta. \quad (8)$$

Подставив (8) в (7) и интегрируя по  $k_x$  и  $k_y$ , получим для амплитуды волны:

$$A(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - \xi, y - \eta, z) A(\xi, \eta, z = 0) d\xi d\eta, \quad (9)$$

где функция Грина

$$G = \frac{\exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4\Lambda z}\right)}{\sqrt{4\pi\Lambda z}} \times \frac{\exp\left(-\frac{(y - \eta)^2}{4\Lambda z}\right)}{\sqrt{4\pi\Lambda z}} \quad (10)$$

Анализ структуры выражения (9) показывает, что оно является точным решением параболического уравнения с мнимым коэффициентом диффузии

$$\Lambda = -\frac{1}{2ik}, \quad (11)$$

которое описывает распространение пучка в квазиоптическом приближении. Математическая модель и геометрические параметры задачи иллюстрируются рис. 3. В области  $z \geq 0$  находится плоско или сферически слоистая оптически неоднородная среда, вектор  $K_a$  задает направление градиента поля неоднородности. Лазерный пучок с эффективным радиусом  $w$  распространяется в плоскости  $XOZ$ ,  $k$  – оптический волновой вектор,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , где  $\lambda$  – длина оптической волны в среде,  $\alpha$  – угол, который ось пучка составляет с осью  $Z$  при  $z = 0$ . Далее, в соответствии с условиями измерений [1], будем предполагать  $\sin \alpha \ll 1$ .

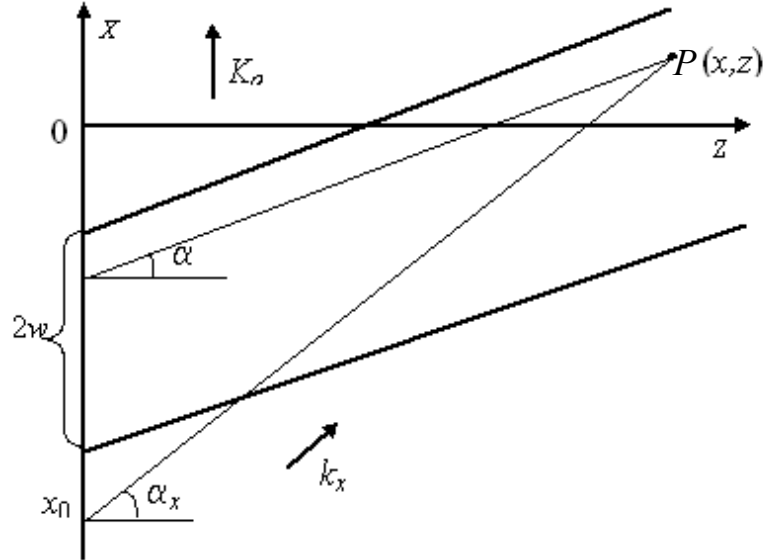


Рис. 3. Геометрические параметры задачи

Пусть  $E(x, y, 0)$  — комплексная амплитуда поля пучка при  $z=0$  на входе в среду, показатель преломления которой при  $z \geq 0$  может быть представлен в виде

$$n(x, y, z) = n_0 + \Delta n(x, y, z), \quad (12)$$

причем выполняется соотношение  $\delta n = \frac{\Delta n}{n_0} \ll 1$ , где  $n_0$  – показатель преломления

невозмущенной среды, а  $\Delta n$  – максимальное отклонение от значения  $n_0$ . Требуется определить комплексную амплитуду  $E(x, y, z)$  в среде в точке наблюдения  $P(x, y, z)$ .

Для решения поставленной задачи поле пучка представляется в виде пространственного спектра, а описание распространения каждой спектральной составляющей в неоднородной среде проводится в рамках приближения геометрической оптики с использованием метода возмущений эйконала и амплитуды [11]. Оптическое поле в точке наблюдения является суперпозицией парциальных волн, интерференция которых с учетом возмущений приводит к искажениям амплитуды и фазы пучка. Использование понятия геометрических лучей для парциальных волн накладывает следующее ограничение на дистанцию  $z$  при заданном значении длины волны  $\lambda$  и характерном размере неоднородности  $a$ :

$$\frac{\lambda z}{a^2} \ll 1. \quad (13)$$

Комплексную амплитуду оптического поля при  $z=0$  представляем в виде

$$E(x, y, 0) = \exp\{ikx \sin \alpha\} A(x, y, 0), \quad (14)$$

где  $A(x, y, 0)$  – комплексная амплитуда при  $\alpha = 0$ . Разложим  $E(x, y, 0)$  в спектр по плоским волнам с параметрами  $k_x$  и  $k_y$ ,

$$E(x, y, 0) = \exp\{ikx \sin \alpha\} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y) \exp\{i(k_x x + k_y y)\} dk_x dk_y, \quad (15)$$

где  $F(k_x, k_y)$  - комплексные амплитуды спектральных составляющих,

$$F(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y, 0) \exp\{-i(k_x x + k_y y)\} dx dy, \quad (16)$$

а направление распространения соответствующих плоских волн характеризуется вектором с компонентами  $(k_x + k \sin \alpha, k_y, \sqrt{k^2 - (k_x + k \sin \alpha)^2 - k_y^2})$ . На рис.3 в плоскости  $XOZ$  изображен геометрооптический луч, образующий с осью  $OZ$  угол  $\alpha_x$  и соответствующий парциальной плоской волне с параметрами

$$k_x = k \sin \alpha_x - k \sin \alpha, \quad k_y = 0. \quad (17)$$

В соответствии с [10] фаза каждой спектральной составляющей в точке наблюдения  $P(x, y, z)$  может быть представлена в виде:

$$\varphi(x, y, z, k_x, k_y) = (k_x + k \sin \alpha)x + k_y y + z \sqrt{k^2 - (k_x + k \sin \alpha)^2 - k_y^2} + \Delta\varphi \quad (18)$$

и определяется интегрированием значений показателя преломления (12) вдоль соответствующего геометрооптического луча. Первые три слагаемых в (18) соответствуют фазе парциальной волны в невозмущенной среде, а последнее слагаемое определяет возмущение фазы  $\Delta\varphi$  из-за присутствия оптической неоднородности:

$$\Delta\varphi(x, y, z, k_x, k_y) = \delta n \cdot f(x, y, z, k_x, k_y). \quad (19)$$

Функция  $f(x, y, z, k_x, k_y)$ , обозначаемая в дальнейшем для краткости  $f$ , определяется структурой конкретной неоднородности (см. пример далее).

Поле в точке наблюдения  $E(x, y, z)$  представляет собой суперпозицию парциальных волн с учетом условий их распространения:

$$E(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(k_x, k_y)}{\sqrt{\gamma(k_x, k_y, x, y, z)}} \exp\{i[(k_x + k \sin \alpha)x + k_y y + z \sqrt{k^2 - (k_x + k \sin \alpha)^2 - k_y^2} + \Delta\varphi]\} dk_x dk_y, \quad (20)$$

где  $\gamma(k_x, k_y, x, y, z)$  учитывает расходимость лучей в неоднородной среде и определяется на основании уравнений переноса [11] для каждой спектральной составляющей.

Для пучков с узким пространственным спектром  $\left(\frac{\lambda}{w} \ll 1\right)$  возможны дальнейшие

упрощения. С точностью до квадратичных членов разложения функций от  $k_x$  в показателе экспоненты (20) представление для комплексной амплитуды лазерного пучка в точке наблюдения имеет вид:

$$E(x, y, z) = \frac{\exp\{i[kz \cos \alpha + kx \sin \alpha + \Delta\varphi_0]\}}{\sqrt{\gamma(0, 0, x, y, z)}} A(x, y, z), \quad (21)$$

где

$$\Delta\varphi_0 \equiv \Delta\varphi_0(x, y, z) \equiv \delta n \cdot f_0(x, y, z), \quad (22)$$

$$A(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k_x, k_y) \exp\{i[k_x(x - z \operatorname{tg} \alpha + \delta n f') + k_y y - \frac{k_x^2}{2k}(z - \delta n k f'') - \frac{k_y^2}{2k} z]\} dk_x dk_y, \quad (23)$$

$f'$  и  $f''$  частные производные по  $k_x$ .

Первый множитель в (23) соответствует полю плоской волны, распространяющейся в неоднородной среде под углом  $\alpha$  к оси  $Z$ . Функция  $\Delta\varphi_0(x, y, z)$  в показателе экспоненты задает возмущение фазы вдоль луча, пришедшего в точку наблюдения (рис.3), а функция расходимости  $\gamma(0,0,x,y,z)$ , которая для заданной конфигурации неоднородности будет определена ниже, в нулевом приближении описывает дифракционные эффекты, обусловленные наличием пространственной неоднородности с характерным размером  $a$ .

Второй множитель  $A(x, y, z)$  учитывает эффекты, связанные с пространственной ограниченностью пучка, т.е. его дифракцию в условиях неоднородной среды, обусловленную наличием характерного размера  $w$ . Для получения удобного аналитического представления, описывающего эти эффекты, сравним (21) с выражением для комплексной амплитуды оптического поля  $E^0(x, y, z)$  в точке наблюдения  $P(x, y, z)$  в невозмущенной среде, т. е. при  $\delta n = 0$ :

$$E^0(x, y, z) = \exp \{i[kz \cos \alpha + kx \sin \alpha]\} A^0(x, y, z), \quad (24)$$

$$A^0(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y) \exp \left\{ i \left[ k_x(x - z \operatorname{tg} \alpha) + k_y y - \frac{k_x^2}{2k} z - \frac{k_y^2}{2k} z \right] \right\} dk_x dk_y. \quad (25)$$

Если представление (25) допускает разделение переменных, например, для гауссовских пучков

$$A^0(x, y, z) = A_x^0(x, z) A_y^0(y, z), \quad (26)$$

то

$$A(x, y, z) = A_x^0(x + \delta n f', z - \delta n k f'') A_y^0(y, z). \quad (27)$$

Учитывая, что функция  $f$  и ее частные производные по  $k_x$  зависят от значений координат точки наблюдения  $P(x, y, z)$  и вводя обозначения

$$\Delta x(x, y, z) = \delta n f', \quad \Delta z(x, y, z) = -\delta n k f'' \quad (28)$$

окончательно запишем (21) в виде

$$E(x, y, z) = \frac{\exp \{i[kz \cos \alpha + kx \sin \alpha + \Delta\varphi_0(x, y, z)]\}}{\sqrt{\gamma(x, y, z)}} A_x^0(x + \Delta x(x, y, z), z + \Delta z(x, y, z)) A_y^0(y, z). \quad (29)$$

Выражение (29) позволяет находить в точке наблюдения  $P(x, y, z)$  комплексную амплитуду лазерного пучка, распространяющегося в слабонеоднородной среде, если известна его комплексная амплитуда в однородной среде. Комплексная амплитуда пучка в среде, возмущенной, например, температурным полем, представляется через комплексную амплитуду пучка в невозмущенной среде в той же точке наблюдения посредством формальной замены в функции  $A_x^0$  координат  $x \rightarrow x + \Delta x$  и  $z \rightarrow z + \Delta z$ , где функция  $\Delta x = \Delta x(x, y, z)$  описывает искажения комплексной амплитуды пучка, связанные с рефракционным смещением лучей по оси  $OX$  в пределах сечения пучка, а  $\Delta z = \Delta z(x, y, z)$  задает изменение условий фокусировки и дифракционного расширения пучка в неоднородной среде.

Волновое описание поля пучка позволяет учесть дифракционные эффекты, имеющие место при использовании методов лазерной рефрактографии для исследования оптически неоднородных сред.

### 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АСТИГМАТИЧЕСКОГО ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА В ОБЪЕМЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ПЛОСКОГО И СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ

Для определения функций  $\Delta\varphi_0(x, y, z)$ ,  $\Delta x(x, y, z)$  и  $\gamma(x, y, z)$ , определенных формулами (22, 28), конкретизируем выражение (12), предполагая, что угол распространения пучка  $\alpha = 0$ , а неоднородность среды представляет собой слой с экспоненциальной зависимостью показателя преломления:

$$n(x, z) = n_0 \left(1 + \delta n e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad (30)$$

где  $a$  – характерная толщина неоднородного слоя.

Соответствующая выражению (19), фаза в точке  $(x, y, z)$  парциальной волны с параметрами  $k_x = k \sin \alpha_x$ ,  $k_y = 0$ , определяется интегрированием вдоль соответствующего луча

$$\varphi(x, z) = k \left\{ x_0(x, z) \sin \alpha_x + \int_{x_0}^x \left(1 + \delta n e^{-\frac{x}{a}}\right) \frac{dx}{\sin \alpha_x} \right\}, \quad (31)$$

где  $x_0 = x - z \operatorname{tg} \alpha_x$  – координата входа луча в среду (рис.3). На основе (19), (20) и (21) определяем функцию  $f$ , характеризующую структуру неоднородности:

$$f = k a e^{-\frac{x}{a}} \left( \frac{e^{\frac{z \operatorname{tg} \alpha_x}{a}} - 1}{\sin \alpha_x} \right). \quad (32)$$

Проведем разложение в ряд по  $k_x$  функции (20) в точке  $k_x = 0$  и воспользуемся соотношениями (22) и (28) с целью получения явных выражений для  $\Delta\varphi_0(x, z)$ ,  $\Delta x(x, z)$ ,  $\gamma(x, z)$ :

$$\Delta\varphi_0(x, z) = \delta n \cdot k z \cdot e^{-\frac{x}{a}}, \quad (33)$$

$$\Delta x(x, z) = \delta n \cdot \frac{z^2}{a} \cdot e^{-\frac{x}{a}}, \quad (34)$$

$$\gamma(x, z) = \sqrt{1 - \delta n \frac{z^2}{a^2} e^{-\frac{x}{a}}}. \quad (35)$$

Соотношения (29) и (33-35) определяют оптическое поле лазерного пучка в среде при наличии неоднородности (30).

Численное моделирование проведем для гауссовского пучка, комплексная амплитуда которого  $A^0(x, y, z)$  в однородной среде определяется выражением

$$A^0(x, y, z) = \frac{A^0(0, 0, z_F)}{\sqrt{1 + D^2}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{w^2(1 + D^2)} - \frac{y^2}{w^2(1 + D^2)} + i\Psi(x, y, z) \right\}, \quad (36)$$

где  $\Psi$  – функция, задающая форму волнового фронта,  $D$  – безразмерная дифракционная длина,  $z_F$  – координата перетяжки:

$$\Psi(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{w^2(1 + D^2)} \cdot \frac{D}{1 + D^2} - \operatorname{arctg} D, \quad (37)$$

$$D = \frac{(z - z_F)}{R_0}, \quad R_0 = \frac{kw^2}{2}, \quad (38)$$

$R_0$ - конфокальный параметр пучка. На основе формул (29), (32-35), в первом приближении метода возмущений эйконала и амплитуды проведен расчет амплитуды гауссова пучка в неоднородности (30) на дистанции  $z$ :

$$A(x, y, z) = \frac{A^0(0,0,z_F)}{\sqrt{1 + D^2 - \delta n \cdot \frac{z^2}{a^2} \cdot e^{-\frac{x}{a}}}} \exp \left\{ -\frac{(x - \delta n \cdot \frac{z^2}{a} \cdot e^{-\frac{x}{a}})^2}{w^2(1 + D^2)} - \frac{y^2}{w^2(1 + D^2)} \right\}. \quad (39)$$

Как следует из структуры (39) дифракционная расходимость пучка из-за ограниченности его радиуса компенсируется фокусировкой пучка из-за рефракции (слагаемые под знаком корня имеют разные знаки), что соответствует возрастанию его амплитуды. Первое слагаемое в показателе экспоненты определяет смещение центра пучка, т.е. описывает рефракцию в волновой трактовке с одновременным учетом искажения формы огибающей пучка. Равенство нулю знаменателя в (39) соответствует образованию каустики, которая при  $z > 1$  см видна на рис. 4, представляющем рефракционную картину лучей в пучке. Расчеты выполнены при  $\delta n = 0,01$ ,  $a = 1$  мм.

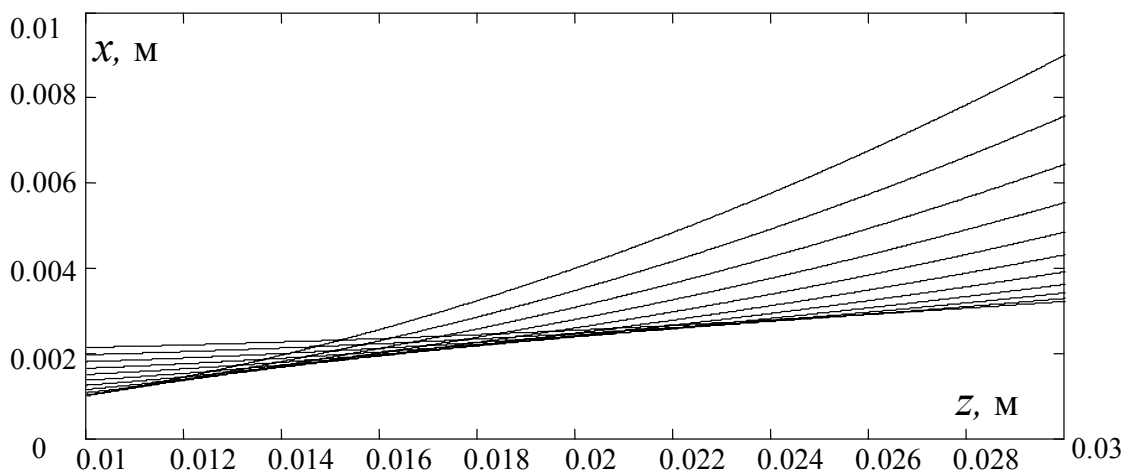


Рис. 4. Рефракция лучей в пучке для плоскослоистой модели при  $\delta n = 0,01$ ,  $a = 1$  мм

Рис. 5. иллюстрирует фокусировку и деформацию астигматического пучка в зависимости от дистанции, пройденной в сферическом слое на расстоянии 0,3 мм от нагретого шара радиусом 40 мм.

#### 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СТРУКТУРИРОВАННОГО ПУЧКА В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ НА ОСНОВЕ ФОРМУЛЫ ГРИНА

Моделирование распространения структурированного пучка в свободном пространстве может проводиться на основе спектрального метода или с использованием формулы Грина.

Переход от спектрального описания:

$$F(k_x, k_y) = F_0(k_x, k_y)H(k_x, k_y), \quad (40)$$

где  $H(k_x, k_y) = \exp\left(iz\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}\right)$

к полювому (на основе формулы Грина) можно осуществить с помощью операции свертки:

$$U(x, y) = \iint U_0(\xi, \eta)h(x - \xi, y - \eta)d\xi d\eta, \quad (41)$$



где пределы интегрирования определяются структурой пучка, а  $h(x,y)$  связано с  $H(k_x, k_y)$  обратным преобразованием Фурье:

$$h(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint H(k_x, k_y) \exp[i(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \iint \exp\left(i\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} z\right) \exp[i(k_x x + k_y y)] = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dz} \left( \frac{e^{ik_0 R}}{R} \right), \quad (42)$$

где  $R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$ .

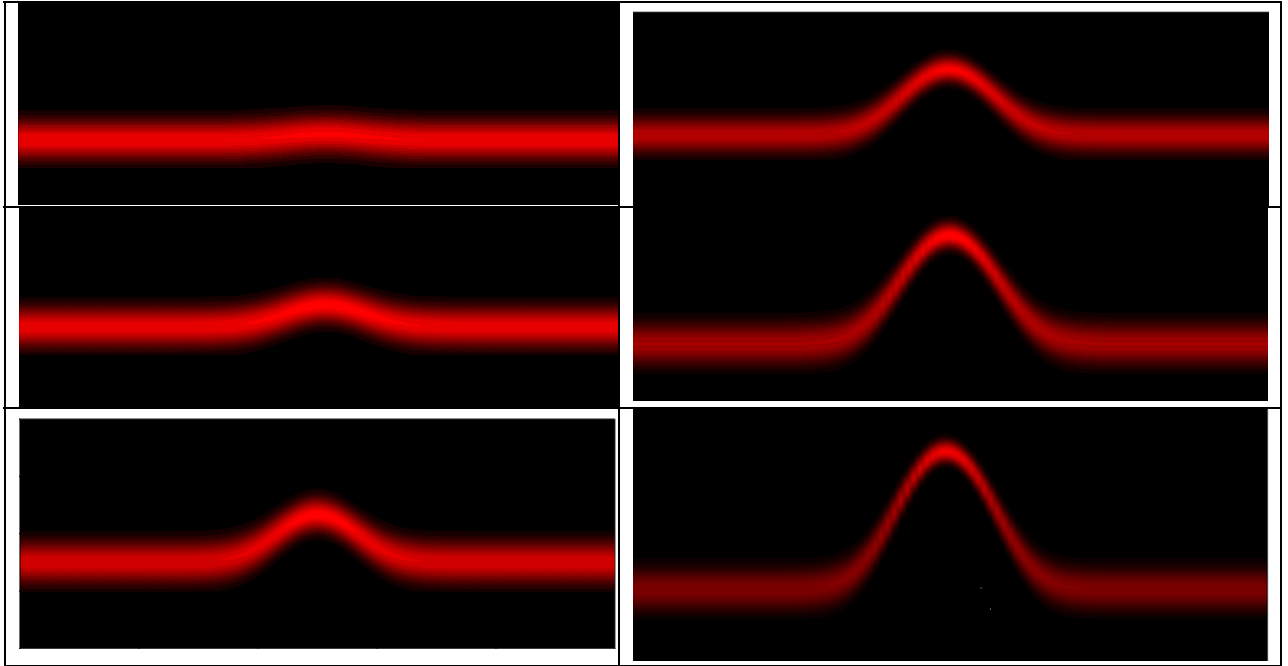


Рис. 5. Расчетные рефрактограммы внутри сферического слоя при изменении дистанции  $z$ : 1–  $z = 2$  мм, 2–  $z = 4$  мм, 3–  $z = 6$  мм, 4–  $z = 8$  мм, 5–  $z = 10$  мм, 6–  $z = 12$  мм

Соотношение (11) следует из формулы Вейля – разложения сферической волны по плоским:

$$\frac{e^{ik_0 R}}{R} = \frac{i}{2\pi} \iint \frac{\exp\left(i\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} z\right)}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}} \exp[i(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y. \quad (43)$$

Окончательно получаем:

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint U_0(\xi, \eta) \frac{d}{dz} \frac{e^{ik_0 R}}{R} d\xi d\eta. \quad (44)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{e^{ik_0 R}}{R} = \frac{e^{ik_0 R}}{R} \left( ik_0 - \frac{1}{R} \right) \frac{dR}{dz}. \quad (45)$$

В условиях оптического эксперимента практически всегда  $R \gg \lambda$  (волновая зона), тогда вторым слагаемым в круглых скобках можно пренебречь, и мы получим:

$$h(x, y) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{dR}{dz} = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{z}{R}, \quad (46)$$

Итак,

$$U(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda} \iint U_0(\xi, \eta) \frac{ze^{ik_0 R}}{R^2} d\xi d\eta. \quad (47)$$

Значение  $U_0(\xi, \eta)$  на выходе из неоднородности найдем в приближении фазового экрана, при условии, что известна пространственная зависимость показателя преломления  $n(x, y)$  и длина неоднородности равна  $l$ . Пусть поле пучка на входе в неоднородность равно  $A(x, y)$ , тогда

$$U_0(x, y) = A(x, y)e^{ikln(x, y)}. \quad (48)$$

Окончательно, поле в плоскости наблюдения  $z_e$ :

$$U(x, y, z_e) = \frac{1}{i\lambda} \iint A(\xi, \eta) e^{ik_0 l n(\xi, \eta)} \frac{ze^{ik_0 R}}{R^2} d\xi d\eta. \quad (49)$$

В отличие от модели, рассмотренной в разделе 3, где учтены объемные эффекты в слое, в приближении фазового экрана предполагается, что амплитудное распределение в сечении пучка на выходе из неоднородности  $A(x, y)$  (рисунок 6) остается неизменным, а меняется только фазовое распределение  $\varphi = k_0 l n(x, y)$ .

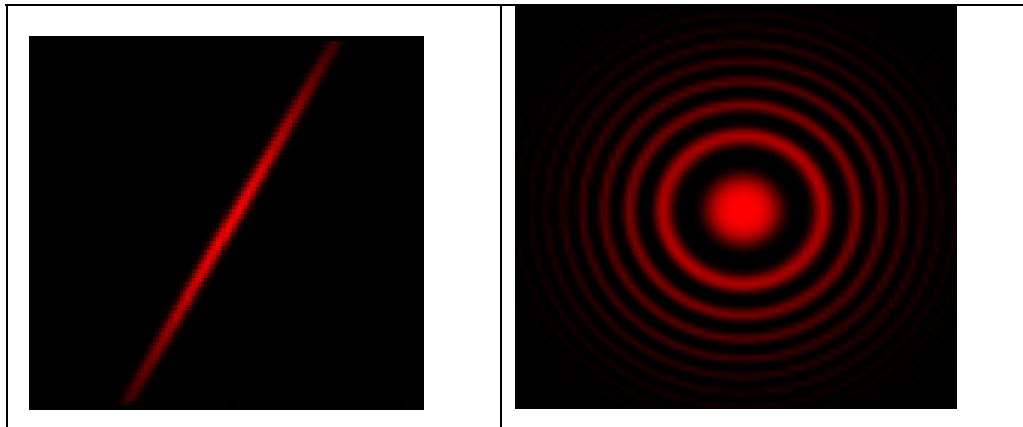


Рис. 6. Примеры расчетных рефрактограмм на выходе из неоднородности: наклонная лазерная плоскость и цилиндрический пучок

На рис. 7 показаны расчетные рефрактограммы горизонтальной лазерной плоскости на выходе из сферической неоднородности (в приближении фазового экрана) и в плоскости наблюдения (расчет по формуле (49))

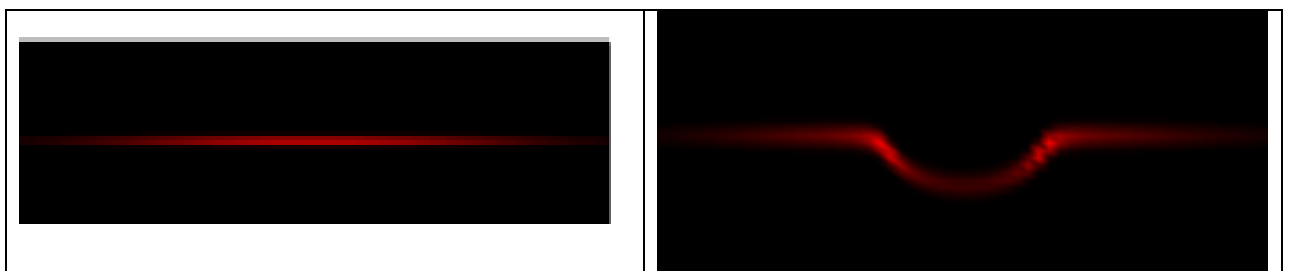


Рис. 7. Расчетные рефрактограммы горизонтальной лазерной плоскости на выходе из сферической неоднородности и в плоскости наблюдения

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было проведено исследование распространения лазерного пучка в слоистых неоднородностях на основе волнового уравнения с учетом рефракции в первом приближении метода возмущений по параметру  $\Delta n$ . Расчет на основе квазиоптического приближения распространения ЛП для разных расстояний от нагретого тела позволяет одновременно учитывать дифракционные и рефракционные эффекты при обработке изображений, что дает возможность снизить погрешность измерений смещения ЛП. Кроме того, применение волнового описания позволяет определить границы

применимости геометрической оптики, в частности, как следует из приведенных выше расчетов, преобладающими являются рефракционные эффекты, что позволяет использовать классические лучевые методы.

#### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. **Евтихиева О.А., Расковская И.Л., Ринкевичюс Б.С.** Лазерная рефрактография. Физматлит, 2008, 176 с.
2. **Расковская И.Л., Ринкевичюс Б.С., Толкачев А.В.** Лазерная рефрактография оптически неоднородных сред. // Квантовая электроника, 2007. № 12, С. 1176 -1180
3. **Методы компьютерной оптики.** /Под ред. В.А.Сойфера. – М.: Физматлит, 2003. 687 с.
4. **Пудовиков Д.Е., Расковская И.Л., Ринкевичюс Б.С., Толкачев А.В.** Диагностика конвективных процессов в пограничном слое жидкости методом лазерной рефрактографии. // Инженерно-физический журнал, 2010, том 83, №6.
5. **Расковская И.Л., Сергеев Д.А., Ширинская Е.С.** Диагностика характеристик солестратифицированной жидкости методом лазерной рефрактографии. // Измерительная техника, 2010, №11
6. **3D-laser refractography new chapter of information optics / B.S Rinkevichyus, O.A. Evtikhieva, M.V. Yesin et al.** / Journal of Physics: Conference Series, Volume 206, 2010 8th International Workshop on Information Optics (WIO' 09) 20-24 July 2009, Paris, France
7. **Rinkevichyus B.S., Raskovskaya I.L., Tolkachev A.V.** 3D-laser refractography. In Book of abstracts. "18th International Conference on Advanced Laser Technologies". 11-16 September 2010. Radboud University Nijmegen. The Netherlands, p.135
8. **Расковская И.Л.** Структурированные пучки в задачах лазерной рефрактографии // Радиотехника и электроника, 2009, том 54, №12, с.1524-1531
9. **Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.** Теория волн. – М.: Наука, 1979, 383 с.
10. **Расковская И.Л.** Распространение лазерного пучка в среде с акустической волной // Радиотехника и электроника. –2004, №11.–С.1382-1389.
11. **Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.** Геометрическая оптика неоднородных сред. – М.: Наука, 1980.